JRAG
نشریه پژوهش های ژئوفیزیک کاربردی
دانشگاه صنعتی شاهرود
انجمن ژئوفیزیک ایران - ۱۳۵٤
Iranian Geophysical Society- 1975
دوره ۶، شماره ۲، ۱۳۹۹، صفحات ۱۵۵–۱۶۵
شناسه دیجیتال (DOI): 10.22044/JRAG.2018.6163.1154

مساله کمترین مربعات کلی در حل مساله واهمامیخت لرزه ای با موجک غیر دقیق در حضور نوفه

علی محمد روستا[1] و علی غلامی[2*]

۱- دانشجوی دکتری، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران
۲- دانشیار، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران

دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۶/۰۴؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۱۰

* نویسنده مسئول مکاتبات: agholami@ut.ac.ir

چکیده

داده لرزه ای دریافت شده را پس از چند مرحله پردازشی می توان به صورت همامیخت موجک چشمه لرزه ای با سری بازتاب زمین در نظر گرفت. واهمامیخت داده، سری بازتاب و در نتیجه تصویر زیرسطحی زمین که هدف اکتشاف لرزه ای هست، را نتیجه می دهد. روش های مرسوم واهمامیخت مبتنی بر کمترین مربعات، عدم قطعیت و نوفه را تنها روی داده اندازه گیری شده در نظر گرفته و موجک چشمه را معلوم فرض می کنند. اما در واقعیت موجک چشمه معلوم نبوده و در تخمین آن عدم قطعیت خواهیم داشت. یعنی سیستم همامیخت تشکیل شده از موجک دارای عدم قطعیت و خطا می باشد. در اینجا مساله کمترین مربعات کلی TLS به عنوان یک ابزار مدرن ریاضی معرفی شده که قادر است عدم قطعیت روی سیستم و همچنین حضور نوفه روی داده را همزمان در یافتن پاسخ بهینه در نظر گیرد. سپس روش کمترین مربعات کلی بریده شده T-TLS بررسی شده و واهمامیخت داده های لرزه ای به کمک T-TLS انجام شده است. می توان نشان داد که عملکرد روش T-TLS نزدیک به فیلتر ونر بوده و به جای برش مقادیر تکین با مقدار کم، آنها را با ضرایب فیلتر تضعیف می کند. نتیجه واهمامیخت T-TLS روی مثال ها در شرایط خطای زیاد روی داده و سیستم، پاسخی بهتر از روش T-SVD و قابل مقایسه با فیلتر ونر را ارایه داده و مشکل برش مقادیر تکین در T-SVD را پوشش داده است.

واژگان کلیدی

کمترین مربعات کلی
واهماهیخت
عدم قطعیت تخمین موجک
داده لرزه ای

۱- مقدمه

اکتشاف لرزه ای، علم کشف و تصویر برداری از درون زمین و یافتن منابع نفت و گاز و ذخیره های معدنی می باشد. امواج لرزه ای که ما توسط چشمه های مصنوعی تولید کرده ایم، درون زمین منتشر شده و تصویر زیرسطحی زمین با دریافت و پردازش امواج منعکس شده توسط زمین به دست می آید. چشمه ها روی سطح زمین و یا در نزدیکی سطح زمین قرار داده شده و امواج لرزه ای تولید می کنند که به سمت عمق زمین منتشر می شوند. این امواج در برخورد با مرز لایه های زمین با توجه به اختلاف خواص الاستیکی، بازتابیده شده و توسط گیرنده های روی سطح زمین دریافت می‌شوند(Gholami et al, 2013; *Sherrif et al., 1995*). رقومی شده داده دریافتی توسط گیرنده، بردار گسسته $b \in \mathbb{R}^n$ ، پس از چند مرحله پردازشی می تواند به صورت همامیخت موجک چشمه $w \in \mathbb{R}^n$ با ضرایب بازتاب زمین $x \in \mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شود. همچنین به داده از منابع تصادفی و ناخواسته نوفه e اضافه شده است. بنابراین داده دریافتی b را به صورت معادله همامیخت زیر می‌توان بیان کرد:

$$b = \left\{ b_n \mid b_n = \sum_{m=0}^{n} w_{n-m} x_m + e_n \right\} = Ax + e \qquad (۱)$$

در این معادله ماتریس سیستم A یک ماتریس ساختار توپلیتز است که از موجک w به دست می‌آید. هدف واهمامیخت، بازیافت ضریب بازتاب x از داده b به کمک معادله (۱) است. واهمامیخت در حوزه های زیادی از پردازش سیگنال و تصویر، نظیر نجوم و کیهان شناسی، نقشه برداری ماهواره ای، تشخیص سیستم و یادگیری ماشینی، تصویر برداری پزشکی، تصویر برداری از زمین و بسیاری موارد دیگر کاربرد دارد (*Gholami et al., 2012*). به وضوح معادله (۱) یک مدل واهمامیخت ایستا است، یعنی اثرات جذب و برخی ملاحظات پردازشی از قبل انجام شده و درون ورودی های آن توصیف شده اند.

به منظور انجام واهمامیخت، تخمین درستی از موجک چشمه مورد نیاز است. در اولین قدم می توانیم فرض کنیم w و در نتیجه $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به طور دقیق معلوم هستند و عدم قطعیت ها فقط در داده اندازه گیری شده b وجود دارند. مساله کمترین مربعات (LS) یک ابزار ریاضی موفق در مواجهه با چنین مسایلی می باشد و می تواند بهترین پاسخ را در حضور خطا روی داده جستجو کند. اما در مساله واهمامیخت داده های لرزه ای، محدودیت طیف موجک، مساله را کاملا بد-وضع می کند. بنابراین پاسخ LS:

$$(A^T A) x_{LS} = A^T b \qquad (۲)$$

از نظر فیزیکی معنای درستی ندارد.

به منظور به دست آوردن یک پاسخ با تفسیر درست، اطلاعات اولیه دیگری باید به مساله به کمک تئوری منظم سازی اضافه شوند (Aster et al., 2005; Tikhonov et al., 1977). در عمل روش های منظم شده ی واهمامیخت مبتنی بر LS به صورت گسترده استفاده می شوند.

وقتی موجک چشمه معلوم باشد، مساله بر حسب x خطی بوده و تئوری کمترین مربعات با الگوی منسجم و کامل شده خود، می تواند واهمامیخت را انجام دهد(Yilmaz, 2008). ولی در واقعیت موجک چشمه به صورت دقیق معلوم نیست. تحقیقات خوبی بر واهمامیخت کور انجام شده و نتایج بسیار خوبی هم داشته اند (Gholami et al., 2013). در این نوشتار ما این رهیافت را دنبال نکرده و مساله را در حیطه تئوری کمترین مربعات کلی بررسی می کنیم.

کمترین مربعات کلی (TLS) یک ابزار قدرتمند و توسعه بدیهی کمترین مربعات (LS) برای حل مسائل وارون است. در وضعیتی که عدم قطعیت هم روی داده و هم روی سیستم وجود دارد، TLS با تغییر هر دوی آنها قادر به یافتن پاسخ سازگار است. نام کمترین مربعات کلی به تازگی در ادبیات پژوهشی وارد شده است (Van Huffel et al., 1993; Van Huffel, 2004)، اما با نام های «رگرسیون متعامد» یا «خطا در متغیرها» در علوم آماری سابقه زیادی دارد. در مقایسه با کمترین مربعات، کمترین مربعات کلی با انعطاف بیشتری می تواند پاسخ مطلوب در سیستم های خوش وضع را بیابد.

کمترین مربعات کلی در سیر تکامل خود از روش های شبیه به LS یا معادلات ویژه بردار/ویژه مقدار به روش حل مبتنی به SVD رسیده است (Golub et al., 1996; Golub et al., 1980). سه گانه های تکین نه فقط اندازه و نرم، بلکه خواص A و b را می توانند در خود داشته باشند و پاسخ را به سمت مشخصات دقیق تری هدایت کنند. این مقاله نیز به منظور بررسی و پیشنهاد پاسخ TLS مبتنی بر SVD بریده شده ($T\text{-}TLS$) برای مسائل بدوضع نوشته شده است.

تئوری

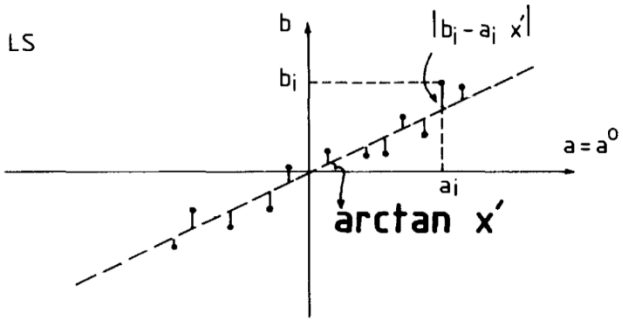
در این بخش صورت کلی مساله کمترین مربعات، T-SVD و فیلتر ونر که منظم سازی مبتنی بر LS هستند، بیان شده و سپس مساله کمترین مربعات کلی به عنوان گسترش کمترین مربعات صورت بندی شده است. سپس کمترین مربعات کلی بریده شده T-TLS تحلیل و اجرای مساله واهمامیخت، به کمک T-TLS انجام شده است.

۱-۱- کمترین مربعات

کمترین مربعات به منظور یافتن پاسخ مساله $Ax = b$ ، با تغییر بردار داده b، بردار b' را به گونه ای می یابد که b' در فضای ساخته شده توسط ستونهای ماتریس A قرار داشته و پاسخ $Ax = b'$ را محاسبه می کند. مساله LS به صورت زیر تعریف می شود:

$$\arg\min_x \| Ax - b \|_2^2 \qquad (۳)$$

و صورت بسته پاسخ آن به شکل $(A^T A)x = A^T b$ است. در شکل (۱) عملکرد LS در حل مساله رگرسیون به منظور برازش خط، به صورت شماتیک رسم شده است.



شکل ۱: طرح شماتیک عملکرد LS در مساله رسم بهترین خط (Van Huffel, 2004).

۲-۱- منظم سازی T-SVD

در سیستم های بد-وضع پاسخ LS اگر چه همچنان کمترین مقدار $\|Ax-b\|_2^2$ را نتیجه می دهد، ولی اثرات تشدید شده ی نوفه آن را از وضعیت واقعی کاملا دور کرده و پاسخ، مناسب و تفسیر پذیر نخواهد بود. به کمک منظم سازی ما می توانیم در فضای پاسخ LS به دنبال پاسخی باشیم که برای آن $\|Ax-b\|_2^2$ از کمترین مقدار دور می شود، ولی ما را در حذف نوفه و یافتن پاسخی نزدیکتر به مقدار واقعی یاری می کند. چنانچه مقادیر تکین عملگر A را به صورت:

$$A=\sum_{i=1}^{n} u_i' s_i' v_i'^T = U' S' V'^T \quad (۴)$$

داشته باشیم، پاسخ T-SVD رتبه k به صورت زیر خواهد بود:

$$x=\sum_{i=1}^{k} \frac{u_i'^T b}{s_i' v_i'} = U' S_k' V'$$

در اینجا تا سطح برش k از مقادیر تکین در محاسبه پاسخ وارد شده و بقیه طیف تکین صفر در نظر گرفته می شوند. این پاسخ به خوبی خطای محاسبات در سیستم بد-وضع را پوشش داده و نوسانات شدید پاسخ LS را کنترل می کند، ولی به دلیل ماهیت برش ناگهانی مقادیر تکین قسمتی از خواص سیستم را نادیده گرفته و فرکانس های برش را به مساله اضافه می کند. یکی از منظم سازی های پرکاربرد مبتنی بر LS فیلتر ونر است، که بسیار پایدار بوده و ساختار آن مشکل برش روش T-SVD را برطرف کرده است. فیلتر ونر به فرم بسته زیر قابل بیان است:

$$(A^T A+\lambda I)^{-1} x = A^T b \quad (۵)$$

فیلتر ونر را می توانیم بر حسب سه گانه های تکین سیستم صورت بندی کنیم که به صورت زیر خواهد بود:

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{s_i^2+\lambda^2}\frac{u_i'^T b}{s_i'} v_i' = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{u_i'^T b}{s_i'} \quad (۶)$$

ضرایب f_i به نام ضرایب فیلتر خوانده می شوند. این ضرایب مشکل برش ناگهانی مقادیر تکین را برطرف کرده و در عین حال که همه خصوصیات سیستم را در معادله حفظ می کنند، با وزن دادن به آنها پاسخ خوبی را نتیجه می دهند.

۳-۱- مساله TLS

کمترین مربعات کلی به منظور حل مساله $Ax=b$ همه داشته ها، یعنی A و b را تغییر داده و $\hat{A}$ و $\hat{b}$ را به گونه ای می یابد که $\hat{b}$ در فضای ساخته شده توسط ستونهای ماتریس $\hat{A}$ قرار داشته و معادله $\hat{A}x=\hat{b}$ را حل می کند. مساله TLS به فرم زیر قابل بیان می باشد (Golub et al., 1980):

$$\arg\min_x \left\| \begin{bmatrix} A & \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (۷)$$

می توان نشان داد که در فرم بسته پاسخ این معادله به صورت:

$$(A^T A - s_{n+1}^2)x = A^T b \quad (۸)$$

می باشد که s_{n+1} اخرین مقدار تکین عملگر [A b] می باشد. اما در این مقاله این رهیافت، که کاملا شبیه معادلات LS است، را دنبال نمی‌کنیم و پاسخی هدفمندتر که مشخصات سیستم و داده را نشان دهد بررسی و اجرا خواهیم کرد. به منظور یافتن پاسخ با کمترین اختلال ممکن، چنانچه معادله $Ax=b$ را به صورت زیر بازنویسی کنیم (Golub et al., 1980):

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (۹)$$

این معادله، یک معادله تبدیل خطی است. مساله در این شکل یافتن مدل $\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$ است که در اثر تبدیل توسط عملگر [A b] صفر شود.

فضای تبدیل عملگر [A b] توسط بردارهای تکین راست و مقادیر تکین آن قابل بیان می باشد. در اینجا هدف ما یافتن فضای صفر عملگر و بیان پاسخ x به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه فضای صفر است. چنانچه رتبه عملگر [A b] کامل باشد، فضای صفر تهی خواهد بود. در اینصورت با کاهش رتبه آن، عملگر $[\hat{A}\ \hat{b}]$ را می یابیم که رتبه ناقص بوده و بتوانیم پاسخ را در فضای صفر ان جستجو کنیم.

بنابراین باید بهترین تقریب رتبه ناقص از عملگر [A b] را بیابیم که شرط:

$$\arg\min_x \left\| \begin{bmatrix} A & \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (۱۰)$$

را نیز داشته باشد. بر طبق قضیه یانگ-اکارت-میرسکی چنانچه سه گانه های تکین [A b] را به صورت:

$$[A \;\; b] = USV^T = \sum_{i=1}^{n+1} u_i s_i v_i^T \tag{۱۱}$$

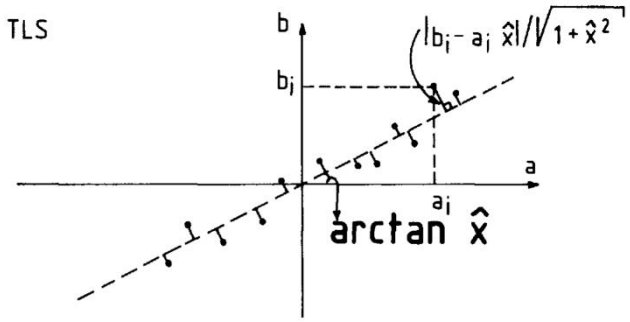
بهترین تقریب رتبه n با صفر قرار دادن آخرین مقدار تکین، به صورت زیر خواهد بود (Golub et al., 1980; Van Huffel et al., 1991):

$$\left[A \;\; \hat{b}\right] = US_nV^T = \sum_{i=1}^{n} u_i s_i v_i^T \tag{۱۲}$$

که $S_n = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n, 0)$ می باشد. اکنون بردار مدل $\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$ صرفنظر از یک ضریب ثابت همان بردار v_{n+1} است، چون فضای صفر فقط از یک بردار v_{n+1} تشکیل شده و هر بردار در این فضا ضریب ثابتی از این بردار پایه خواهد بود. با توجه به معلوم بودن آخرین عنصر بردار مدل $\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$، ضریب ثابت نیز قابل محاسبه خواهد بود، پس:

$$x = \frac{-1}{v(n+1, n+1)} v_{n+1} \tag{۱۳}$$

سایر ملاحظات مساله TLS از قبیل خطای ایجاد شده، محدوده خطای روی سیستم A و داده b و تقریبهای بالاتر را می توانیم در منابع دنبال کنیم. در شکل (۲) عملکرد TLS در حل مساله رگرسیون به منظور برازش خط، به صورت شماتیک رسم شده است.



شکل ۲ :طرح شماتیک عملکرد TLS در مساله رسم بهترین خط (Van Huffel, 2004).

۴-۱- کمترین مربعات کلی بریده شده T-TLS

در شرایطی یکسان با مساله LS یعنی در مسائل بدوضع، با کمترین نوفه پاسخ از شرایط پایدار خارج شده و رهیافت اصلی در یافتن پاسخ TLS نمی تواند پاسخی تفسیر پذیر به ما بدهد. بنابراین ما مجبور به تقریب بیشتر روی سیستم و حذف تعداد بیشتری مقادیر تکین عملگر [A b] هستیم.

در اینحالت چنانچه تمامی مقدار تکین از $(k+1, \cdots, n+1)$ را حذف کنیم و فقط k مقدار تکین بزرگ را در نظر بگیریم، بهترین تقریب رتبه k سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\left[A \;\; \hat{b}\right] = \sum_{i=1}^{k} u_i s_i v_i^T = US_kV^T \tag{۱۴}$$

که $S_k = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \cdots, s_k, 0, \cdots, 0)$ خواهد بود. چنانچه بردارهای تکین راست عملگر [A b] را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} \\ V_{12} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} k & n-k \end{matrix} \tag{۱۵}$$

در اینحالت فضای صفر عملگر [A b] توسط عملگر زیر قابل بیان است:

$$V_0 = V(:, n-k:n) = \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

و پاسخ x ترکیب خطی از پایه های فضای صفر یعنی $n-k$ ستون تکین خواهد بود. به وضوح اکنون پاسخ یکتا نیست و همه ترکیب های خطی از بردارهای پایه فضای صفر، پاسخ مساله هستند. می توانیم پاسخ کمترین نرم که در این فضا پاسخی یکتا خواهد بود را محاسبه کنیم. روش محاسبه پاسخ کمترین نرم به این صورت است که، با اعمال تبدیل هوزهولدر به فضای صفر عملگر ماتریس بالا مثلثی زیر را تولیدکنیم (Van Huffel et al., 1991):

$$V_0 \times H = \begin{bmatrix} Q & Y \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{matrix} k-n & 1 \\ & \end{matrix} \tag{۱۷}$$

و با توجه به مقدار ثابت ۱- در مدل $\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$ پاسخ x به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$x = -\frac{Y}{\alpha} \tag{۱۸}$$

۲- بیان تحلیلی T-TLS در مقایسه با T-SVD

در بخش ۲-۲ منظم سازی T-SVD بر حسب سه گانه های تکین عملگر سیستم A نوشته شد. می توان نشان داد که اگر چه محاسبات T-TLS بر حسب سه گانه های تکین عملگر [A b] بسیار شبیه به T-SVD است، ولی بر حسب سه گانه های تکین عملگر A پاسخ آن کاملا ساختار فیلتر داشته و به صورت زیر نوشته می شود (Fierro et al., 1997):

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{k} F_i \frac{u_i'^T b}{s_i'} v_i' \tag{۱۹}$$

$$F_i = \sum_{\substack{j=1 \\ V(n+1,j)\neq 0}}^{k} \frac{V(n+1,j)^2}{\|V_{22}\|_2^2} \frac{s_i'^2}{s_j^2 - s_i'^2}$$

پاسخ T-TLS در این فرم، به خوبی می تواند از نظر تحلیلی درستی

اندیشه و کار ما در این مقاله را توجیه کند. اولین دستاورد بسیار مهم این است که ضرایب فیلتر روش T-TLS از همه داده ها یعنی هم عملگر سیستم A و هم داده اندازه گیری شده b به دست می آیند و قادر هستند که عدم قطعیت همزمان روی داده و همچنین سیستم (عدم قطعیت در تخمین موجک لرزه ای) را دربر داشته باشند. همچنین ما توانسته ایم به یک صورت بندی معادل از فیلتر ونر دست پیدا کنیم که مزیت مهمی نسبت به فیلتر ونر با خود به همراه دارد و آن، انتخاب ضریب منظم سازی است. ضریب منظم سازی λ در فیلتر ونر یک عدد حقیقی است و یافتن مقدار بهینه آن چالش اصلی استفاده از فیلتر ونر در تحلیل مسایل وارون است. در اینجا انتخاب ضریب مشابه روش T-SVD به طور کامل محدود به مقدار صحیح k می باشد. در واقع حتی با کمترین اطلاعات اولیه، انتخاب پاسخ بهینه در این مساله تنها با تغییر رتبه سیستم امکان پذیر خواهد بود، که با جستجوی مقدار k از ۱ تا تعداد مقادیر تکین، میسر می شود.

۶-۲-کمترین مربعات کلی چند بعدی

می دانیم در شرایطی که برای تعداد زیادی ردلرزه یک موجک معادل تخیمن زده و بخواهیم واهمامیخت همه ردلرزه ها را با آن انجام دهیم، حجم محاسبات کاهش یافته و از رابطه زیر می توان پاسخ فیلتر ونر را بدست آورد:

$$(A^T A+\lambda I)x = A^T B \qquad (۲۰)$$

در مساله TLS نیز می توان پاسخ چند بعدی برای این ردلرزه ها داشت. برای سیستم $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و داده های $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ چنانچه سه گانه های تکین عملگر $[A\ \ B]$ را به صورت:

$$[A\ \ \mathrm{B}] = U_m S_m V_m^T \qquad (۲۱)$$

داشته باشیم، می توان نشان داد که با بیان بردارهای تکین راست به صورت:

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} \\ V_{12} & V_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ n-p \\ p \end{array} \qquad (۲۲)$$

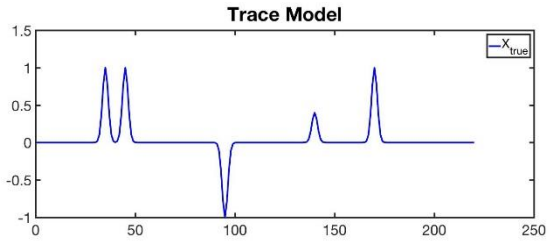
پاسخ کمترین نرم از معادله زیر به دست می آید (Van Huffel et al., 1991):

$$X^{n\times p} = -V_{12}(V_{22}^T)^{\dagger} = -V_{12}V_{22}^T \left\|V_{22}\right\|_2^2 \qquad (۲۳)$$

عملگر†، بیانگر شبه معکوس می باشد. به کمک این معادله پاسخ واهمامیخت همه ردلرزه ها تنها با یک بار تجزیه به مقادیر تکین به دست می آید. همچنین در اینجا فقط محاسبه تعداد k بردار تکین سمت راست ضرورت دارد. در بخش بعد با اجرای روش روی داده ساختگی و واقعی، روابط تئوری را صحت سنجی خواهیم کرد.

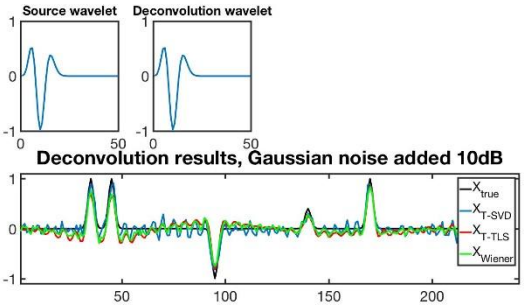
۳- داده ها و نتایج

زمین از لایه هایی با ضخامت تصادفی تشکیل شده است. بنابراین بهتر است مدل ساختگی برای زمین را تشکیل شده از لایه هایی با ضخامت تصادفی و ضرایب بازتاب متنوع در نظر بگیریم. در قدم اول به منظور بررسی دقیق تر خصوصیات روش ها، مدل ساده تری را به عنوان مدل زمین در نظر گرفته و نتایج آورده شده است. این مدل در عین سادگی یک لایه نازک، لایه با ضریب بازتاب منفی و لایه با ضریب بازتاب ضعیف را در بر دارد. مقطع عمقی/زمانی مدل، مربوط به یک گیرنده در شکل (۳) رسم شده است.



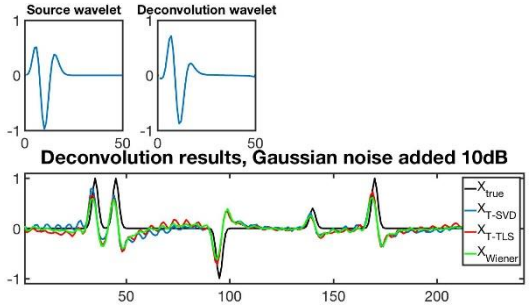
شکل ۳: مدل ساختگی زمین در نقطه یک گیرنده

در ادامه تاثیر نوفه و عدم قطعیت در تخمین موجک (فرکانس مرکزی و فاز) را مورد بررسی قرار می دهیم. سیگنال چشمه لرزه ای را موجک ریکر کمینه فاز با فرکانس مرکزی ۴۰Hz در نظر گرفته و هماميخت این موجک با مدل زمین، ردلرزه ثبت شده توسط گیرنده را نتیجه خواهد داد. شکل (۴) با فرض دانستن موجک دقیق و تنها حضور نوفه نرمال با انحراف معیار ۱۰dB روی داده دریافتی، خروجی هر سه روش، T-SVD، T-TLS و فیلتر ونر را نشان می دهد:



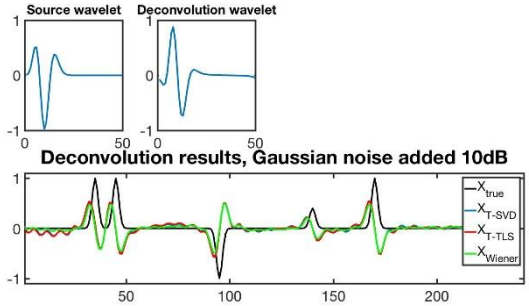
شکل ۴: پاسخ واهمامیخت با معلوم بودن موجک کمینه فاز و نوفه گاوسی روی داده.

اکنون با همان سطح نوفه (که در تمامی مقایسه های بعدی هم سطح نوفه ثابت است.) فرض شده است که در تخمین موجک عدم قطعیت داشته ایم. در این وضعیت موجک واهمامیخت با همان فرکانس مرکز ۴۰Hz ولی اختلاف فاز ثابت ۴۵ درجه (در فاز مثبت و منفی) در نظر گرفته شده و شکل (۵) خروجی را نشان می دهد:



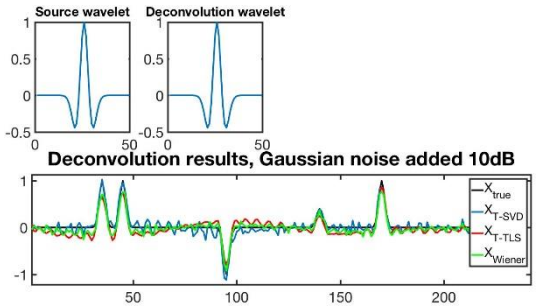
شکل ۵:پاسخ واهمامیخت با نوفه روی داده و موجک کمینه فاز با خطای تخمین ۴۵ درجه فاز

و شکل (۶) خروجی روش ها را با خطای فاز بیشتر، مقدار ۹۰ درجه، نشان می دهد:



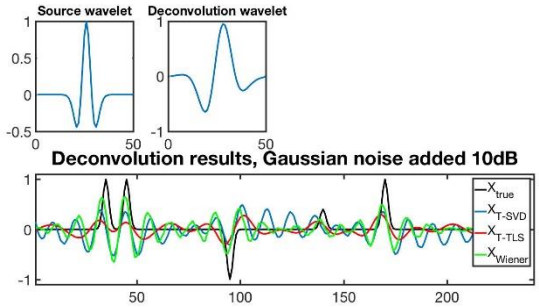
شکل ۶:پاسخ واهمامیخت با نوفه روی داده و موجک کمینه فاز با خطای تخمین ۹۰ درجه فاز

در هر حالت روش T-TLS به خوبی قادر به ارائه پاسخی پایدار و مناسب در مقایسه با پاسخ T-SVD و فیلتر ونر می باشد. اکنون همین تغییرات را با موجک فاز صفر نیز بررسی کرده ایم. ابتدا خروجی با موجک دقیق و فقط نویز رو داده در شکل (۷) رسم شده است:



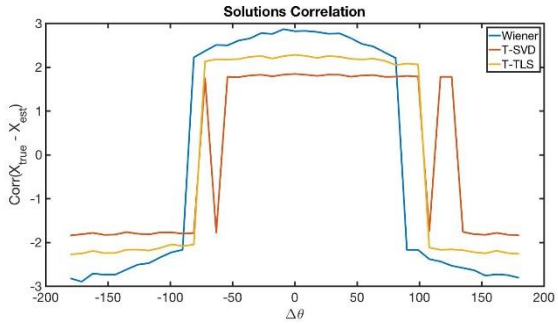
شکل ۷:پاسخ واهمامیخت با نوفه روی داده و معلوم بودن موجک فاز صفر

اکنون خطا در تخمین فرکانس مرکزی را نیز در موجک واهمامیخت در نظر می گیریم. بدین منظور موجک واهمامیخت با فرکانس مرکزی ۲۰Hz استفاده شده است. در شکل (۸) علاوه بر نویز روی داده، موجک با عدم قطعیت فاز ۴۵ درجه و خطا در تخمین فرکانس مرکزی برای واهمامیخت استفاده شده است:



شکل ۸:پاسخ واهمامیخت با نوفه روی داده و موجک فاز صفر با خطای تخمین ۴۵ درجه فاز و خطای تخمین فرکانس موجک

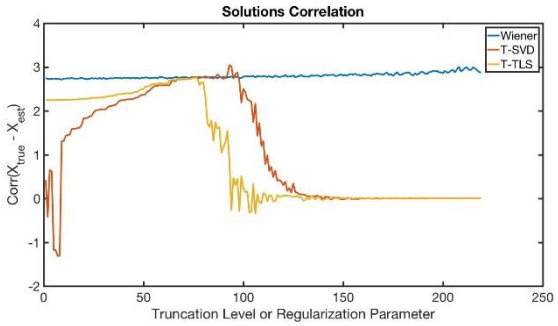
این خروجی ها، بخصوص در شرایط خطا روی سیستم (موجک) به خوبی پایداری عملکرد روش T-TLS را نشان می دهند. البته از همان ابتدا می دانستیم که هدف T-SVD یا روش T-TLS پاسخ تنک نیست و این روش ها، پاسخی هموار با نرم کم را به دست می آورند. با اینجال پاسخ آنها در عین سادگی روش و اجرا، پاسخی خوب و پایدار می باشند. با هدف در اختیار داشتن معیاری کمی برای مقایسه پاسخ ها، در اینجا همبستگی پاسخ هر روش با مدل اصلی محاسبه شده و بیشترین مقدار همبستگی مورد بررسی قرار گرفته است. مشکل اصلی در استفاده از روش های کمترین مربعات کلی حجم محاسبات بشتر آنها در مقایسه با روش های کمترین مربعات می باشد. به همین دلیل در اینجا به منظور کاهش حجم محاسبات و تاکید بر پاسخ مناسب روش T-TLS، تنها ۱۰٪ مقادیر تکین را در نظر گرفته و بقیه را برش داده ایم. پاسخ هر سه روش با خطای فاز در محدوده $-180 \leq \Delta\theta \leq 180$ محاسبه شده و همبستگی پاسخ با x_{true} در شکل (۹) رسم شده است.



شکل ۹:همبستگی پاسخ با مدل واقعی در مقادیر مختلف خطای فاز موجک.

پاسخ T-TLS به خوبی توانسته پایداری خود را در وضعیت های مختلف خطای فاز حفظ کرده و در هر دو روش T-SVD و T-TLS

تنها پارامتری که نیاز به محاسبه داشته و پاسخ را تعیین می کند، سطح برش مقادیر تکین k می باشد که رتبه تقریب سیستم را مشخص کرده و با توجه به داده و سطح نوفه، در محاسبه آن عدم قطعیت خواهیم داشت. بنابراین بررسی حساسیت پاسخ ها به سطح برش مقادیر تکین می تواند در نگرش ما به روش ها مفید باشد. در شکل (۱۰) همبستگی پاسخ ها با x_{true} به ازای تغییرات پارامتر k رسم شده است. همچنین به منظور حضور روش ونر در این مقایسه، با تغییر پارامتر منظم سازی بر حسب میزان برش مقادیر تکین، تغییرات همبستگی پاسخ ونر نیز در شکل گنجانده شده است. روش T-TLS در مقادیر کم k حساسیت کمتری به خطای محاسبه این پارامتر نشان داده و در مقادیر زیاد k با افزایش زیاد نوسانات پاسخ (که از روش TLS انتظار می رود) به ما در تعیین سطح (رتبه) تقریب سیستم، کمک می کند.



شکل ۱۰:حساسیت پاسخ به تغییر پارمتر منظم سازی فیلتر ونر و سطح برش مقادیر تکین در روش های T-SVD و T-TLS

تعیین سطح برش از چالش های مهم و مورد توجه در مساله‌های برش مقادیر تکین است. روش GCV (Sima et al., 2007) ، یکی از مناسب ترین روش ها در مساله T-TLS می باشد. در این روش سطح برش k برای روش T-SVD از معادله کمینه سازی زیر نتیجه می‌شود:

$$\min_k \frac{\|Ax_{T-SVD}-b\|^2}{m-k} \qquad (۲۴)$$

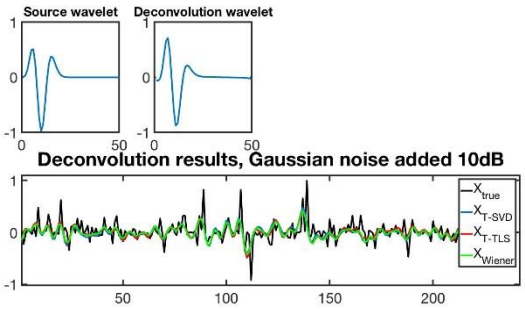
در این معادله m تعداد نمونه های یک ردلرزه داده دریافتی می باشد. به همین ترتیب با داشتن ضرایب فیلتر f_i روش T-TLS و محاسبه

$$P_k^{eff} = \sum_{i=1}^{n} f_i^k \qquad (۲۵)$$

سطح برش روش T-TLS از معادله کمینه سازی زیر به دست می‌آید:

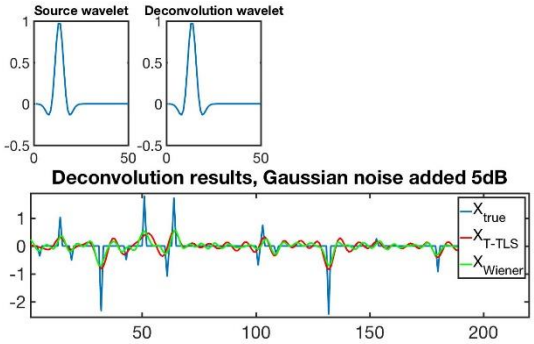
$$\min_k \frac{\|Ax_{T-TLS}-b\|^2}{m-P_k^{eff}} \qquad (۲۵)$$

روش GCV به منظور تعیین سطح برش در اینجا به کار برده شده و نتایج روش ها در شکل (۱۱) مقایسه شده اند. به کارگیری این روش برای تعیین سطح برش در مساله ضمن تعیین خودکار سطح برش، به خوبی با نتایج قبلی همخوانی دارد.



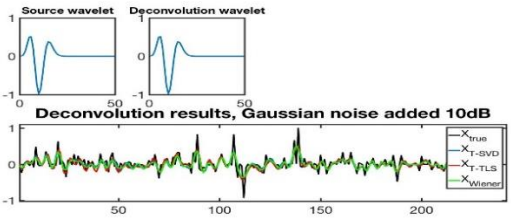
شکل ۱۱:مقایسه پاسخ ها و تعیین سطح برش توسط روش GCV

اکنون می توان مدل پیچیده تری برای زمین در نظر گرفته و نتایج را دوباره آزمایش کرد. در قدم اول یک مدل تنک برای زمین در نظر گرفته با تغییر موجک چشمه ریکر به فرکانس مرکزی ۲۰Hz که آن را معلوم در نظر گرفته و پاسخ روش T-TLS در مقایسه با فیلتر ونر در شکل (۱۲) رسم شده است. در این شکل نوفه روی داده ۵dB بوده و کمترین خطا روی کرنل در نظر گرفته شده است.

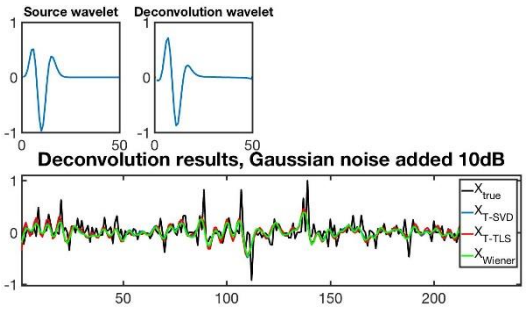


شکل ۱۲:مقایسه پاسخ T-TLS با فیلتر ونر در یک ردلرزه تنک

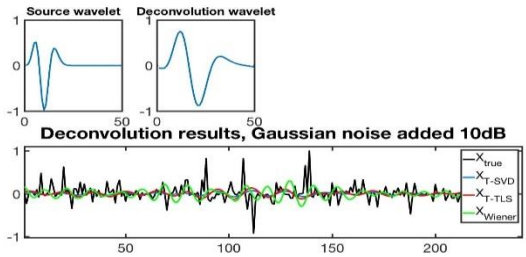
با توجه به ماهیت عملکرد فیلتر ونر و روش های ذکر شده که هموارسازی پاسخ را نتیجه می دهد در ادامه مدل زمین را هموارتر اگر چه با انعکاس های تصادفی غیر تنک در نظر گرفته و پاسخ ها بررسی شده اند. در شکل های (۱۳) تا (۱۵) پاسخ ها با در نظر گرفتن موجک چشمه ریکر ۴۰Hz، خطای داده ۱۰dB، در وضعیت های تخمین دقیق موجک، خطای فاز ۴۵ درجه و خطای فاز همراه با خطا در تخمین فرکانس با برش مقادیر تکین ۱۰٪ رسم شده اند:



شکل ۱۳:پاسخ واهامیخت مدل زمین نزدیک به واقعی با نوفه روی داده و معلوم بودن موجک کمینه فاز

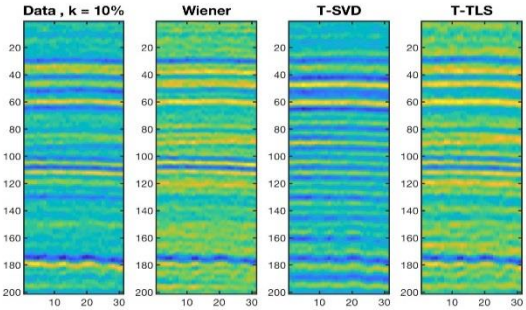


شکل ۱۴:پاسخ واهمامیخت مدل زمین نزدیک به واقعی با نوفه روی داده و خطای فاز تخمین موجک



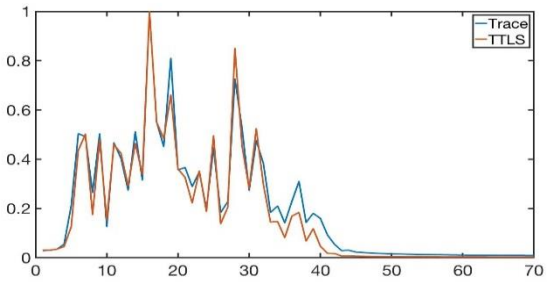
شکل ۱۵: پاسخ واهمامیخت مدل زمین نزدیک به واقعی با نوفه روی داده و خطای فاز و فرکانس تخمین موجک

در پایان پاسخ هر سه روش روی یک داده واقعی که مراحل پردازش اصلی را پشت سر گذاشته است بررسی شده است. لازم به ذکر است که پاسخ روش T-TLS به روش چند کاناله به دست آمده است، یعنی موجک و عملگر سیستم برای همه تریس ها یکسان در نظر گرفته شده است که در نتیجه حجم محاسبات کاهش یافته و فقط یک بار محاسبات مقادیر تکین از سیستم و داده مورد نیاز است. تخمین موجک چشمه به کمک روش کولموگروف با هموارسازی طیف داده و سپس تشکیل موجک کمینه فاز انجام شده است. در شکل (۱۶) پاسخ ها در حالت سطح برش مقادیر تکین فقط ۱۰٪ طیف تکین داده، رسم شده اند:



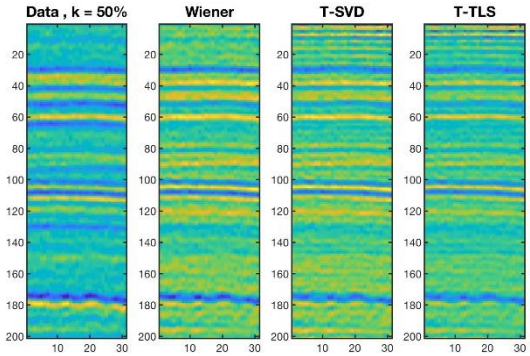
شکل ۱۶:پاسخ واهمامیخت داده واقعی، استفاده از تنها ۱۰٪ مقادیر تکین در بازسازی پاسخ

طیف متوسط نتیجه واهمامیخت روش T-TLS برای یک ردلرزه در شکل (۱۷) در مقایسه با داده، رسم شده است:

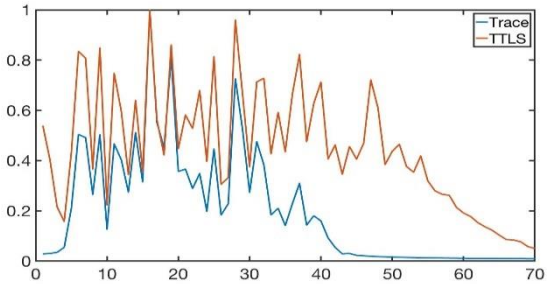


شکل ۱۷: میانگین طیف ردلرزه های پاسخ T-TLS و داده واقعی در سطح برش k=10%

در این مثال ها، عملکرد بهتر T-TLS در مقایسه با T-SVD و شباهت بیشتر پاسخ آن به فیلتر ونر قابل مشاهده است. انتظار داریم با افزایش سطح برش مقادیر تکین، پاسخ T-SVD نیز بتواند خود را به پاسخ ونر نزدیک کند. در شکل های (۱۸) و (۱۹) پاسخ و طیف آنها در وضعیت انتخاب سطح برش ۵۰٪ طیف تکین داده، برای هر سه روش رسم شده اند.



شکل ۱۸: پاسخ واهمامیخت داده واقعی، استفاده از ۵۰٪ مقادیر تکین در بازسازی پاسخ

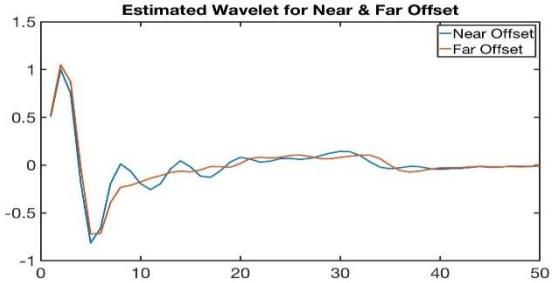


شکل ۱۹: میانگین طیف در لرزه های پاسخ T-TLS و داده واقعی در سطح برش k=50%

این پاسخ ها به خوبی پایداری بیشتر و حساسیت کمتر روش T-TLS در وضعیت های خطای زیاد داده و تخمین موجک و در نتیجه انتخاب سطح برش زیاد مقادیر تکین، به مقدار k را نشان می دهند که مزیت بسیار مهمی است.

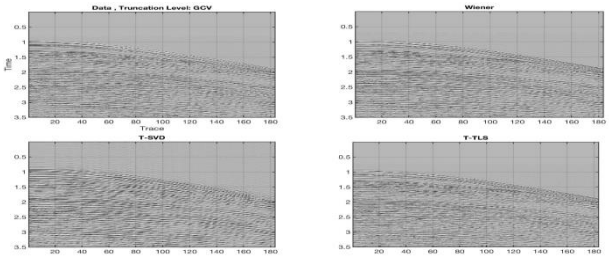
واهمامیخت داده های لرزه‌ای همواره با مشکل تخمین موجک چشمه مواجه است، و این مشکل با در نظر گرفتن دورافت چشمه-گیرنده شرایط

پیچیده‌تری به خود می گیرد. تغییر دورافت در مقطع چشمه مشترک موجب تغییر شکل موجک شده و واهمامیخت مقطع را با چالش مواجه می‌کند. در ادامه برای یک مقطع چشمه مشترک از داده دریایی خلیج مکزیک تخمین موجک انجام شده و خروجی روش‌ها مقایسه شده‌اند. موجک‌های تخمین زده شده در دورافت نزدیک و دورافت دور در شکل (۲۰) رسم شده است.

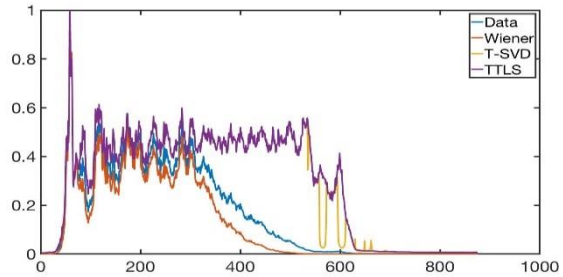


شکل ۲۰:موجک چشمه برای دورافت های متفاوت در یک مقطع چشمه مشترک

واهمامیخت مقطع با موجک میانگین انجام شده و طیف میانگین خروجی روش‌ها در شکل (۲۱) رسم شده است و در نهایت در شکل (۲۲) خروجی روش ها برای مقطع چشمه مشترک مورد بررسی آورده شده است. بررسی پاسخ‌ها به وضوح برتری روش T-TLS در وضعیت خطا و عدم قطعیت در تخمین موجک را به روش T-SVD نشان می‌دهد.



شکل ۲۱:طیف میانگین نتیجه واهمامیخت روش‌ها در مقطع چشمه مشترک



شکل ۲۲: پاسخ روش‌ها به مقطع چشمه مشترک با خطای تخمین موجک در دورافت‌های متفاوت

۴- بحث و نتیجه گیری:

کمترین مربعات کلی TLS به عنوان توسعه بدیهی کمترین مربعات LS در مسائلی که خطا و عدم قطعیت روی داده و همچنین کرنل وجود دارد، مطرح شده است. با اینکه مبانی ریاضی کمترین مربعات کلی TLS به خوبی تبیین شده و می تواند جایگزین مناسبی برای LS در مسائل خوش-وضع با عدم قطعیت و خطا روی همه داشته های مساله باشد، اما پایداری کمتر و حجم محاسبات بیشتر TLS در عمل این روش را ناکارآمد گذاشته است.

مساله واهمامیخت داده های لرزه ای به دلیل ماهیت آن بد-وضع بوده و پاسخ LS از نظر فیزیکی معنای درستی ندارد. در عمل باید به کمک روش های منظم سازی مبتنی بر LS مساله را پایدار کرده و به پاسخی مناسب رسید. تحلیل مساله واهمامیخت به کمک TLS با توجه به ناپایداری ذاتی آن، منجر به شرایط بد-وضع تری نسبت به LS شده و لزوم استفاده از روش های منظم سازی بیشتر خواهد بود.

در این نوشتار روش کمترین مربعات بریده شده T-TLS و معادلات حاکم بر آن مطالعه شده است. نشان داده شد که علیرغم اینکه روش T-TLS بر حسب مقادیر تکین کرنل-داده شبیه به روش مقادیر تکین بریده شده T-SVD بوده و از مقداری تعیین شده مقادیر تکین را برش می دهد، ولی بر حسب مقادیر تکین کرنل ساختاری کاملا فیلتر گونه دارد و همه ی مقادیر تکین را در تشکیل پاسخ شرکت می دهد.

در نهایت روش T-TLS در واهمامیخت داده های لرزه ای ساختگی و واقعی به کار برده شد. اگر چه همچنان پاسخ این روش به خوبی پاسخ فیلتر ونر نیست، ولی در مقایسه با T-SVD نتیجه کاربرد آن بسیار خوب بود و امید است که زمینه ورود ابزار ریاضی پیشرفته و قدرتمند TLS به مباحث ژئوفیزیکی باشد. ساختار ضرایب فیلتر روش T-TLS با ضرایب فیلتر ونر متفاوت بوده و بررسی این ضرایب می تواند زمینه ساز کارهای تحقیقی آینده بوده و پاسخ این روش را هر چه بیشتر بهبود دهد.

۵- منابع

Aster, R.C., Borchers, B., and Thurber, C.H., 2005, Parameter estimation and inverse problems, Elsevier Academic Press, International Geophysics Series, 21.

Fierro, R. D., Golub, G. H., Hansen, P. C., and O'leary, D. P., 1997, Regularization by Truncated Total Least Squares, Siam J. Sci. Comput., Vol. 18, No. 4, pp-1223-1241.

Gholami, A. and Sacchi, M.D., 2012, A Fast and Automatic Sparse Deconvolution in the Presence of Outliers, Vol. 50, No. 10.

Gholami, A. and Sacchi, M.D, 2013, Fast 3D Blind Seismic Deconvolution via Constrained Total Variation and GCV, SIAM J., Imaging Sciences, Vol. 6, No. 4, pp. 2350-2369.

Golub, G.H., and C.F. Van Loan, 1996, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 3th

ed., Baltimore.

Golub, G.H., and C.F. Van Loan, 1980, An Analysis of the total least squares problem, SIAM, J. Numer. Anal., 15, no 17, 883-893.

Sherrif, R.E., and Geldart, L.P., 1995, Exploration seismology, 2nd ed., Cambridge University Press.

Sima, D. M., and Huffel, S. V., 2007, Level choice in truncated total least squares, Computational Statistics and Data Analysis, vol. 52, no. 2, pp. 1103–1118.

Tikhonov, A.N., and V.Y. Arsenin, 1977, Solution of ill-posed problems, Wiley, New York.

Van Huffel, S., and Zha, H., 1993, The Total Least Squares Problem, Elsevier Science Publishers, handbook of statistics, Vol. 9, p- 377.

Van Huffel, S., 2004, Total least squares and error-in-variables modeling: Bridging the gap between statistics, Computational mathematics and engineering, Physica-Verlag, 44.

Van Huffel, S., and J. Vanderwalle, 1991, The total least squares problem: Computational aspects and analysis, SIAM, Philadelphia.

Yilmaz, O., 2008, Seismic data analysis, processing, inversion and interpretation of seismic data, Electronic ed., Society of Exploration Geophysics.

Shahrood University of Technology

JOURNAL OF RESEARCH ON APPLIED GEOPHYSICS

(JRAG)
2020, VOL 6, NO 2
(DOI): 10.22044/JRAG.2018.6163.1154

Total least squares problem in seismic data deconvolution with inaccurate wavelet in the presence of noise

Ali Muhammad Rousta[1], Ali Gholami[2]

1. PhD Student, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.
2. Associate Professor, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Received: 26 August 2017; Accepted: 1 March 2018

Corresponding author: agholami@ut.ac.ir

Keywords

Total least squares
Regularization
Seismic
Deconvolution

Extended Abstract

Summary

Seismic exploration is the science of imaging and exploring subsurface structures. Deconvolution is one of the major steps in seismic data processing, and is widely used in image processing, cosmology, medical imaging, and other applications. Recorded seismic data after some processing steps can be regarded as convolution of the Earth reflectivity series and seismic wavelet. Deconvolution of the data thus can result in the reflectivity series that consequently a high-resolution image of the underground can be constructed as the output of seismic processing. Traditional deconvolution methods based on the least squares (LS) filters, consider noise and uncertainty only on the observed data and assume the seismic wavelet to be known. In practical applications, however, these assumptions are met rarely because the seismic wavelet is usually unknown or is known only approximately. Thus, the kernel of deconvolution, which is constructed from the wavelet, is inaccurate. In this situation, the uncertainty is present in both the data and the kernel. The method of total least squares (TLS), as a modern mathematical tool, has been developed for solving such problems. In this paper, we propose a truncated TLS (T-TLS) algorithm for seismic data deconvolution. It is shown that in contrast to the conventional truncated singular-value-decomposition (T-SVD) technique, which truncates the singular values of the operator, the T-TLS treats the singular values smoothly similar to the job done via the Wiener Filter. This means that the T-TLS as a truncation technique behaves as a hybrid of T-SVD and Wiener Filter. LS based deconvolution methods assume error only in data. In order to handle error in data and also in kernel, here we propose a T-TLS algorithm and compare its results with those of T-SVD and Wiener Filter solutions. The numerical example, presented in this paper, show that the performance of the T-TLS algorithm lies between these two techniques.

Introduction

LS based deconvolution methods consider uncertainty and error only in data, but in seismic exploration, wavelet is usually unknown or is known only approximately. The natural improvement of LS is TLS that has been developed to consider uncertainty in both data and kernel. Unfortunately, TLS is less stable and deregularized compared to the LS approach, thus it has been less applied on real data. In this paper, we introduce and apply T-TLS in seismic data deconvolution. T-TLS provides better solutions for synthetic and real data than T-SVD, and can be compared with the conventional Wiener solutions.

Methodology and Approaches

Deconvolution is an ill-posed problem; hence in the presence of uncertainty, the LS solution does not make sense physically. To dealing with this problem, we have to use regularization methods such as T-SVD or Wiener Filter. Here, we introduce TLS and T-TLS, and then, analyze T-TLS, which theoretically has filter coefficients and a behavior similar to Wiener Filter rather than T-SVD. These three methods, i.e. Wiener Filter, T-SVD, and T-TLS are used to deconvolve seismic data, and then, a comparison is made between these methods.

Results and Conclusions

Application of T-TLS deconvolution on the synthetic and real data in this research shows that it can cover some problems due to zeroing singular values in T-SVD. However, deregularized property of TLS makes T-TLS solutions less stable than Wiener Filter.