مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۳/ صفحه ۱۷-۳۰

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.9854.3213

حل دو مسأله کلاسیک اندرکنش سازه ـ سیال با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی

آزاده جعفری[۱] و احمد آفتابی ثانی[۲,*]

[۱] دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] استادیار، مهندسی عمران، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۶

چکیده

قرارگیری سیال در مجاورت سازه، مانند آنچه در سیستم‌هایی مانند سد بتنی ـ مخزن یا مخازنِ ذخیره آب یا نفت به چشم می خورد، سببِ ایجادِ دشواری ها و پیچیدگی‌هایی در تحلیل هر دو حوزه سازه و سیال می‌شود. از نقطه نظر ریاضی، کنار هم قرار گرفتن جامد و مایع، سببِ درگیر یا در اصطلاح «کوپل شدن» معادلات حاکم بر این دو محیط می‌شود، به قسمی که حل مجزای معادلات مربوط به هر یک از دو محدوده مزبور غیرممکن خواهد بود. در سال‌های اخیر، روش‌های گوناگونی برای حل اینگونه مسائل ارائه شده است که در حالت کلی، به «مسأله اندرکنشِ سازه ـ سیال » معروفند؛ اما در این میان، روش نسبتاً جدید «تبدیلِ دیفرانسیلی » که شیوه‌ای است، نیمه تحلیلی ـ نیمه عددی برای حلِ انواع معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، کمتر در حلِ مسائل اندرکنشی بکار گرفته شده است. هدف مقاله پیش‌رو، بکاربستن روش تبدیل دیفرانسیلی در حل یک مسأله کلاسیک اندرکنش سازه ـ سیال و همچنین، معرفی یک مسألهٔ جدید اندرکنشی بر پایه مسأله کلاسیک مزبور و ارائه حل بسته (البته در کنارِ حل به روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی) برای آن است. خوشبختانه، نتایج عددی که شامل فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی هر دو سیستمِ مورد بحث در مقاله اند، نشانگر دقت بالای روش تبدیل دیفرانسیلی در حل این دو مسأله اندرکنشی است.

کلمات کلیدی: اندرکنش سازه ـ سیال؛ روش تبدیل دیفرانسیلی؛ پاسخ فرم بسته.

Solving Two Classical Fluid-Structure Interaction Problems Utilizing Differential Transform Method

A. Jafari [1], A. Aftabi Sani [2,*]

[1] Ph.D. Candidate, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

[2] Assistant Professor, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

Abstract

Up to now, several analytical and numerical methods are proposed for free vibration analysis of fluid-structure interaction systems. Concrete gravity or arch dam-reservoir systems and the fluid containers in various shapes, such as rectangular, cylindrical or spherical shapes are the most well-known instances of these “coupled” systems. It should be emphasized that the governing equations of both fluid and structural parts of these coupled systems should be solved simultaneously. In the present article, two classical fluid-structure interaction (FSI) problems, including one-dimensional compressible fluid domain and one or two single degree of freedom (SDOF) system(s) as structural part, are solved in free vibration situation by using differential transform method (DTM). To this end, the solution process is thoroughly described and the numerical results, involving natural frequencies and mode shapes of both systems are obtained in detail. Moreover, to verify the DTM results, the closed-form solution is comprehensively derived for both systems.

Keywords: Fluid-Structure Interaction; Differential Transform Method; Closed-Form Solution.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۱۳۸۸۰۵۰۶۸؛ فکس: ۰۵۱۳۸۸۰۷۱۸۴

آدرس پست الکترونیک: aftabi@um.ac.ir

۱- مقدمه

کنار هم قرار گرفتن سازه‌ها و سیالات در سیستم‌هایی نظیر سدها یا مخازن ذخیره سیالات، از نظر فیزیکی، سببِ تغییرِ تنش‌ها در بخشِ جامد و فشارها در بخشِ سیال و از نظرِ ریاضی، سببِ تغییراتی در معادلاتِ حاکم بر مسأله می شود. در عمل، تحلیل و طراحیِ این گونه سامانه‌ها که به سیستم‌های اندرکنشیِ سازه ـ سیال معروفند، از دو جنبه نظری و تحقیقاتی و همچنین عملی و کاربردی از اهمیت و جذابیتِ فراوانی برخوردارند. از طرفِ دیگر، آسیب دیدنِ جزئی و گاه کلیِ برخی از سیستم‌های اندرکنشی در طولِ مدتِ بهره برداری، مانندِ ترک برداشتن و حتی تخریبِ کلیِ آن‌ها و نیز آسیب دیدنِ مخازنِ ذخیرهٔ آب حینِ وقوعِ زلزله به‌دلیلِ در نظر نگرفتن و در پاره ای موارد، محاسباتِ نه چندان دقیقِ نیروهای ناشی از پدیده ی اندرکنشِ سازه ـ سیال، بر اهمیتِ این موضوع افزوده است.

ناگفته پیداست که به موازاتِ اهمیت یافتنِ بحثِ اندرکنش و لحاظ کردنِ آن در تحلیل و طراحیِ سیستم های اندرکنشی در سال‌های اخیر، تحقیقاتِ متعدد ی پیرامونِ شیوه‌های مدل‌سازی و بررسیِ سامانه های اندرکنشی انجام گرفته و تاکنون روش‌های مختلفی برای تحلیلِ هرچه دقیق‌تر و سریع‌ترِ آن ها پیشنهاد شده است. به عنوان نمونه، توسعه مدل‌های اجزاءِ محدودِ سیستم های اندرکنشی، استفاده از روشِ اجزاءِ مرزی، معرفیِ المان های نیمه‌بینهایت برای مدل‌سازی بالادستِ مخازنِ سدها، ارتقاءِ الگوهای تفاضلاتِ محدود و احجامِ محدود و ... شماری از پژوهش های عددیِ صورت گرفته در این زمینه می‌باشند که در کنارِ پاسخ‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلیِ ارائه شده برای اینگونه سیستم‌ها، امکانِ دست یابی به پاسخ‌های نسبتاً دقیقِ دینامیکیِ سیستم های اندرکنشی را فراهم ساخته‌اند.

در مقاله پیش‌رو برآنیم تا روشِ نسبتاً جدیدی که تاکنون کمتر در حل مسائلِ اندرکنشی بکار رفته است (بر اساسِ جستجوهای صورت گرفته، فقط یکبار و آنهم در مرجعِ [۲۴] و البته برای مسأله‌ای متفاوت با آنچه در این مقاله حل خواهد شد)، یعنی روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی را در حلِ دو مسألهٔ اندرکنشی بکار بندیم و بدین ترتیب، قدرت و دقت آنرا در حل مسائلِ درگیر (coupled) محک بزنیم. برای این منظور، در ادامه، شماری از کارهای پژوهشیِ متأخر در زمینه تحلیلِ اندرکنشِ سازه ـ سیال را به شکلی گذرا مرور کرده و پس از آن، به پیشینه استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی در حلِ انواعِ مسائلِ مهندسی و فیزیکی خواهیم پرداخت.

در زمینه تحلیلِ اندرکنشِ سد بتنی و مخزن، سمیعی و لطفی در سالِ ۲۰۰۷، نتایجِ حاصل از بکارگیریِ دو روشِ مبتنی بر شکلِ مودهای درگیر و غیردرگیر (decoupled) را با هم مقایسه کردند [۱] . پس از آن، آفتابی‌ثانی و لطفی در سالِ ۲۰۱۰، شکلِ مود های جدیدی را تحتِ عنوانِ مودهای درگیر ایده‌آل (ideal-coupled) معرفی کرده و در آنالیزِ مودالِ سدهای قوسیِ بتنی موردِ استفاده قرار دادند [۲]. آن شکلِ مودها، در واقع شکلِ مود های درگیرِ دو سیستمِ ایده آلِ ساختگی بودند. شایانِ ذکر است که مسألهٔ مقدارِ ویژهٔ درگیرِ این سیستم‌ها متقارن بودند که در مقایسه با مسائلِ نامتقارنِ مرسوم در سیستم‌های اندرکنشی، مزیتِ مهمی به شمار می‌رفت. در سالِ ۲۰۱۷ رضایی‌پژند و همکاران، به تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ سدهای بتنیِ قوسی با استفاده از روشِ ایده آل ـ درگیرِ درجهٔ دو (quadratic ideal-coupled) پرداختند [۳]؛ همچنین، حجتی و لطفی در سالِ ۲۰۱۱، از المان‌های نیمه‌بینهایتِ سیال برای تحلیلِ دینامیکیِ سدهای وزنی استفاده کردند [۴]. آن‌ها روشی سریع و ساده برای محاسبهٔ ماتریس‌های ایمپدانسِ این المان ها پیشنهاد دادند. در همین راستا، آفتابی‌ثانی و لطفی (۲۰۱۰)، یک روشِ جدید برای ارزیابیِ پاسخِ لرزه ایِ سدهای بتنیِ قوسی پیشنهاد کردند. در این پژوهش، افزون بر اندرکنشِ سازه ـ سیال، اثرِ اندرکنشِ سد ـ مخزن ـ سنگِ پی نیز در نظر گرفته شده بود [۵]. ناگفته نماند، چوپرا در سالِ ۲۰۱۲، به شناساییِ فاکتورهایی پرداخت که نقشِ مهمی در تحلیلِ سه بعدیِ سدهای قوسی دارند[۶].

در زمینه تحلیلِ اندرکنشِ مخازنِ ذخیره سیالات، کیم و همکاران (۱۹۹۶)، یک روشِ تحلیلی برای بررسیِ رفتارِ دینامیکیِ مخازنِ مستطیلی با دیواره های انعطاف‌پذیر که بخشی از آنها توسطِ سیال پر شده بود ، با در نظر گرفتنِ اثر اندرکنشِ سازه ـ سیال، ارائه دادند[۷]. علاوه بر این، آن‌ها پاسخِ مخزنِ مستطیلیِ پُر از سیال را تحتِ تحریکِ قائم نیز بدست آوردند. شایانِ ذکر است، سیال غیرویسکوز و تراکم‌ناپذیر فرض شد. استفاده از فرم‌های تعمیم‌یافته سیستم‌های یک درجه آزادی برای طراحی و تحلیلِ لرزه ایِ

مخازنِ استوانه ایِ بتنی توسطِ چن و کیانوش (۲۰۰۹)، موردِ بررسی قرار گرفت [۸]. پس از آن، قائم‌مقامی و کیانوش (۲۰۱۰)، به بررسیِ رفتارِ دینامیکیِ مخازن مستطیلی با در نظر گرفتنِ اثرِ اندرکنشِ سازه ـ سیال در حالتِ دو بعدی پرداختند [۹]. آن‌ها نتیجه گرفتند که انعطاف‌پذیریِ دیواره ها و ویژگی‌های مربوط به میراییِ سیال، نقشِ مهمی در پاسخِ دینامیکیِ این‌گونه سیستم‌ها ایفا می‌کنند؛ همچنین، رضایی‌پژند و همکاران در سالِ ۲۰۱۶، مسألهٔ ارتعاشِ آزادِ مخازنِ مستطیلیِ کاملاً پر با دیواره های انعطاف‌پذیر را به فرمِ بسته حل کردند [۱۰]. در این بررسی اندرکنشِ سازه ـ سیال در نظر گرفته شد و سیال غیرویسکوز و غیرچرخشی، اما تراکم‌پذیر فرض شد. شایانِ ذکر است، در پژوهشِ مزبور، یک فرمولِ تقریبی برای تعیینِ توزیعِ فشارِ سیال روی دیواره‌های مخزن نیز ارائه شد.

در کنار مخازنِ مستطیلی شکل، پژوهش هایی نیز روی مخازنِ استوانه ای انجام شده است. به عنوانِ نمونه، لیکیس و همکاران (۲۰۰۹)، یک روشِ نیمه تحلیلی برای تحلیلِ دینامیکیِ مخازنِ استوانه ایِ نیمه پر پیشنهاد کردند[۱۱]. آن‌ها در این بررسی حرکتِ سطحِ آزادِ سیال را در نظر گرفتند. در ادامه، خجسته‌کاشانی و آفتابی‌ثانی در سالِ ۲۰۱۶، ارتعاشِ آزادِ مخازنِ استوانه ایِ افقیِ ذخیرهٔ مایعات را با درنظر گرفتنِ اثر موجِ سطحی و با استفاده از روشِ اجزاءِ محدودِ قطبی (Polar FEM) تحلیل نمودند [۱۲]. لازم بذکر است، اینگونه سازه‌ها، در کنارِ امکانِ ذخیره سیالات و احاطه کردنِ سیال ممکن است، داخلِ یک سیال غوطه ور باشند. در سالِ ۲۰۱۸، ابراهیمی ممقانی و همکاران، با بررسیِ ارتعاشاتِ سازه‌های غوطه‌ور، تأثیرِ یک جاذبِ غیرخطی را بر رفتارِ دینامیکیِ تیرِ اویلر ـ برنولی موردِ مطالعه قرار دادند[۱۳].

پس از مرورِ مختصر و گذرای پاره‌ای تحقیقاتِ صورت گرفته پیرامون مسائلِ اندرکنشِ سازه ـ سیال، به سراغِ مرورِ پیشینهٔ پژوهشی در زمینه روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی رفته و شماری از پژوهش‌های مهم و مرتبط با تئوری و کاربردِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی را مرور می کنیم.

روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی DTM یک روشِ نیمه‌تحلیلی ـ نیمه‌عددی برای حلِ انواعِ معادلاتِ دیفرانسیلِ معمولی و جزئی با انواعِ شرایطِ مرزی و اولیه است. این روش را نخستین بار ژو در سالِ ۱۹۸۶ برای حلِ مسائلِ مقدارِ اولیه خطی و غیرِ خطیِ مرتبط با تحلیلِ مدارهای الکترونیکی به کار بست. بعد از معرفیِ این روش توسطِ ژو، بسیاری از محققان این روش را در زمینه‌های گوناگونِ علومِ کاربردی و مهندسی موردِ استفاده قرار دادند.

به عنوانِ نمونه، نوری‌فر و همکاران در سالِ ۲۰۱۶، نوسان‌سازهای غیرِخطی را با استفاده از روشِ تبدیل دیفرانسیلِ چندگامی (MSDTM) بهینه تحلیل کردند [۱۴]. آن‌ها با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلِ چندگامی، چند معادلهٔ معروف، مانندِ دافینگ، وان‌درپُل و رایلی را با در نظر گرفتنِ میرایی حل کردند و نتایجِ خود را با نتایجِ بدست آمده از روشِ تفاضلاتِ محدود مقایسه کردند؛ همچنین، جندقیِ سمنانی و همکاران در سالِ ۲۰۱۲، با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلیِ دوبعدی به تحلیلِ مسئلهٔ ارتعاشِ آزادِ صفحاتِ نازک با تغییراتِ ضخامتِ دلخواه پرداختند [۱۵]. آن‌ها ابتدا معادلاتِ دیفرانسیلِ حاکم بر نوسانِ صفحاتِ نازک با تغییراتِ ضخامتِ دلخواه را با استفاده از اصلِ همیلتون استخراج کردند و سپس، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی را در حلِ آن به کار بستند. این بار هم نتایج، نشان‌دهندهٔ توانایی و دقتِ روشِ مزبور در تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ صفحاتِ با ضخامتِ یکسان و متغیر بود.

در همین راستا کِی منش و همکاران، به حلِ معادلاتِ غیرِخطیِ حاکم بر جریانِ سیالاتِ غیر نیوتنی و تراکم‌ناپذیر بینِ دو صفحهٔ موازی با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی پرداختند [۱۶]. در ادامه، تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ لوله های حاملِ سیال با شرایطِ مرزیِ مختلف، با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی توسطِ نی و همکاران انجام شد [۱۷]. پس از آن، گاکدوگان و همکاران، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلیِ گام به گامِ تطبیقی AMSDTM را معرفی کردند [۱۸]. حاتمی و همکاران در سالِ ۲۰۱۴، به تجزیه و تحلیلِ حرکتِ یک ذرهٔ کروی در جریانِ سیال با کاربستِ MSDTM پرداختند [۱۹]؛

همچنین، ابراهیمی ممقانی و همکاران، ارتعاشاتِ اجباریِ لولهٔ حامل سیال را تحتِ بارگذاریِ خارجیِ هارمونیک بررسی کردند [۲۰]. در این پژوهش، لوله موردِ نظر با استفاده از تئوریِ تیرِ اویلر ـ برنولی مدل شد. آن‌ها یک مدلِ ریاضی برای تحلیلِ حرکتِ جریانِ دو فازیِ سیال در لوله‌های قائم طره‌ای ارائه کرده و تأثیرِ پارامترهای مختلف مانندِ سرعتِ جریان و میراییِ سازه را موردِ بررسی قرار دادند. [۲۱].

در ادامه، رضایی‌پژند و همکاران در سالِ ۲۰۱۷، از روشِ تبدیل دیفرانسیلی برای حلِ مسألـه ارتعاشِ آزادِ قاب ها استفاده کرده و نتایجِ خود را با پاسخ های حاصل از روش اجزاءِ محدود مقایسه کردند [۲۲]. این محققان، در سالِ ۲۰۱۸، مطالعاتی در زمینه کاربردِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی در تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ یک قاب با چهار عضوِ مورب دلخواه انجام دادند [۲۳]. در ادامه، رضایی پژند و همکاران در سالِ ۲۰۱۸، برای نخستین بار، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی را در حلِ یک مسألۀ اندرکنشِ سازه ـ سیال بکار بستند [۲۴]. آن‌ها رفتارِ دینامیکیِ تیرِ اویلر ـ برنولی را در مجاورتِ یک سیالِ تراکم ناپذیر و غیرِ لزج، توسطِ یک مسألـه مقدارِ مرزی مدل‌سازی و با کمک روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی حل کردند. صحت‌سنجیِ نتایج نیز با روشِ اجزاءِ محدود صورت گرفت.

از مجموعه پژوهش‌های مرور شده در این بخش، می‌توان نتیجه گرفت که تاکنون شیوه‌های عددی و غیرِ عددیِ گوناگونی برای تحلیلِ مسألـه اندرکنشِ سازه ـ سیال موردِ استفاده قرار گرفته است که در این میان، سهمِ روشِ اجزاءِ محدود بیش از سایرِ روش‌هاست؛ اما از سوی دیگر، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی که در بخشِ آتی به مرورِ مبانیِ نظریِ آن خواهیم پرداخت، به جز یک مورد (مرجعِ [۲۴])، تاکنون در حلِ مسائلِ اندرکنشِ سازه ـ سیال به کار نرفته است.

بر همین اساس، در مقاله پیش‌رو، نخست به معرفیِ روشِ تبدیلِ دیفرا نسیلی خواهیم پرداخت. سپس، حلِ بستـه یک مسألۀ کلاسیکِ اندرکنش سازه ـ سیال را با استفاده از مرجعِ [۲۵] شرح می‌دهیم. در ادامه، با تغییرِ یکی از دو شرطِ مرزیِ مسألۀ مزبور، به مسأله پیچیده‌تر و کاربردی‌تر می‌رسیم که آنرا هم در ابتدا، به فرمِ بسته حل خواهیم کرد. سپس، حلِ هر دو مسأله طرح شده در مقاله را با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی تشریح می‌کنیم. در پایان نیز به رسمِ مرسوم، به ارزیابی و مقایسۀ نتایجِ عددیِ بدست آمده می‌پردازیم.

۲- روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی

همانطور که پیش از این بدان اشاره شد، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی یک روشِ نیمه تحلیلی ـ نیمه‌عددی برای حلِ انواعِ معادلاتِ دیفرانسیلِ معمولی و جزئی است. پایه و اساسِ این روش، استفاده از سریِ تیلورِ تابعِ مجهولِ معادلـه دیفرانسیل است. در این روش پاسخِ معادله دیفرانسیل به‌صورتِ یک عبارتِ چندجمله‌ای با ضرایبِ مجهول فرض می‌شود. با جایگذاریِ این سری در معادلۀ دیفرانسیل، یک رابطۀ کلی به‌نامِ رابطۀ بازگشتی پیدا خواهد شد که ضرایبِ مذکور را تحتِ الگویی مشخص محاسبه خواهد کرد. در واقع، روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی یک فرآیندِ تکراری برای به‌دست آوردنِ ضرایبِ سریِ تیلورتابعِ پاسخ معادلۀ مفروض است. با استفاده از این روش، بدونِ نیاز به خطی‌سازی و گسسته‌سازی و یا ایجاد آشفتگی در مسأله، در اغلب موارد، می‌توان به جوابِ قابلِ قبول و با دقتِ بالا یی دست یافت.

ریاضی‌دانِ انگلیسی، بروک‌تیلور در سالِ ۱۷۱۵ میلادی، مفهومِ سریِ تیلور را بیان کرد. هر تعدادِ متناهی از نخستین جملاتِ سریِ تیلور به چندجمله‌ایِ تیلور معروف است. سریِ تیلور تابعِ یک متغیره $f(x)$ در نقطه $x=x_0$ به‌صورتِ زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \qquad (۱)$$

طبقِ تعریف، $F[k]$ تبدیلِ دیفرانسیلیِ $f(x)$ است و به صورتِ رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$F[k]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \qquad (۲)$$

بر اساسِ رابطـه (۲)، متغیرِ مستقل و حقیقیِ x به متغیرِ مستقل، صحیح و مثبتِ k و متغیرِ وابسته و حقیقیِ f به متغیرِ وابسته و حقیقیِ F تبدیل می‌شود. بدین ترتیب، رابطۀ بینِ تابعِ $f(x)$ و تبدیلِ دیفرانسیلیِ آن، یعنی $F[k]$ به‌صورتِ رابطه (۳) درمی‌آید:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}F[k](x-x_0)^k \qquad (۳)$$

که در آن N تعدادِ جملاتِ موردِ استفاده در سریِ پاسخ است. قوانینِ اساسیِ تبدیلِ دیفرانسیلی با کمکِ تعریفِ آن به‌دست می‌آیند. در جدول ۱ به برخی از مهمترین قوانینِ تبدیلِ دیفرانسیلی اشاره شده است .

پس از معرفیِ مختصرِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی و قوانینِ اساسیِ مرتبط با آن، در بخش بعد، به شرحِ مسائلی که قرار است در این مقاله، به روشِ فوق الذکر حل شوند، پرداخته خواهد شد.

جدول ۱- قوانینِ اساسی DTM

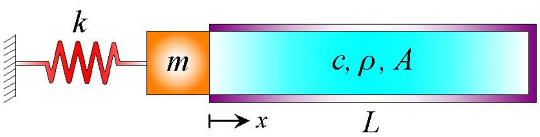
$f(x)=w(x)\pm v(x)$	$\mathrm{F}[k]=\mathrm{W}[k]\pm \mathrm{V}[k]$
$f(x)=\alpha w(x)\ ;\alpha\in \mathrm{R}$	$\mathrm{F}[k]=\alpha \mathrm{W}[k]$
$f(x)=\dfrac{dw(x)}{dx}$	$\mathrm{F}[k]=(k+1)\,\mathrm{W}[k+1]$
$f(x)=\dfrac{d^2w(x)}{dx^2}$	$\mathrm{F}[k]=(k+1)(k+2)\,\mathrm{W}[k+2]$
$f(x)=\dfrac{d^mw(x)}{dx^m}$	$\mathrm{F}[k]=(k+1)(k+2)...(k+m)\,\mathrm{W}[k+m]$
$f(x)=x^m$	$\mathrm{F}[k]=\delta(k-m)=\begin{cases}0 & k\neq m\\ 1 & k=m\end{cases}$
$f(x)=(1+x)^m$	$\mathrm{F}[k]=\dfrac{m(m+1)...(m-k+1)}{k!}$
$f(x)=v(x)w(x)$	$\mathrm{F}[k]=\sum_{k_1=0}^{k}\mathrm{V}[k_1]\mathrm{W}[k-k_1]$
$f(x)=v(x)w(x)g(x)$	$\mathrm{F}[k]=\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\mathrm{V}(k_1)\mathrm{W}(k_2-k_1)\mathrm{G}(k-k_2)$

۳- شرح مسأله

در این بخش، هر دو مسأله اندرکنشیِ موردِ بررسی در مقال ه پیش‌رو، نخست معرفی و سپس، با استفاده از تکنیک‌های حلِ معادلاتِ دیفرانسیل، به فرمِ بسته حل می شوند تا از پاسخ‌های حاصل از آنها، برای ارزیابی دقتِ نتایج بدست آمده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی (موضوعِ بخشِ ۴ مقاله) استفاده شود.

۳-۱- استوانۀ حاویِ سیال با یک سیستم جرم و فنر

نخستین مسأله اندرکنشِ سازه ـ سیالِ موردِ بررسی در این مقاله که یکی از مسائلِ معروف و کلاسیک این شاخۀ پژوهشی بوده و تاکنون توسطِ پژوهشگرانِ متعد دی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است، استوانه یک بعدی حاویِ سیالِ تراکم‌پذیر است که در یک انتهای آن، سیستمِ جرم و فنر قرار گرفته و در انتهای دیگر، کاملاً بسته و نفوذناپذیر است [۲۱].



شکل ۱- استوانه یک بعدیِ حاوی سیال

پیش از پرداختن به روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی، روندِ رسیدن به حلِ فرمِ بسته مسأله تحلیلِ نوسانِ آزاد سیستم فوق، بر اساس مرجع [۲۵]، تشریح می‌شود.

معادله حاکم بر سیالِ تراکم‌پذیر، همان معادله معروفِ موج است که بصورتِ رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$\nabla^2\overline{p}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial t^2} \qquad (۴)$$

در رابطه فوق، $\overline{p}$ فشارِ سیال و c سرعتِ موج عبوری از آن است. یادآوری می‌کند، معادلاتِ دیفرانسیلِ وابسته به زمان را می‌توان هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس حل کرد. حل در حوزه زمان، یعنی حلِ مستقیمِ معادله و بدست آوردنِ تابعِ مجهول بر حسبِ زمان ؛ اما در حوزه فرکانس، نخست با اعمالِ تبدیلِ فوریه به دو طرفِ معادله، مشتقاتِ زمانیِ موجود در معادله را از بین برده و سپس، به حلِ فرمِ جدیدِ معادله می‌پردازند. بدین ترتیب، تابعِ مجهول بر حسبِ فرکانس بدست می‌آید که انتقالِ آن به حوز ه زمان و یافتنِ تابعِ مجهولِ اصلی بر حسبِ زمان، با استفاده از تبدیلِ معکوسِ فوریه، امکان‌پذیر است. با انتقالِ رابط ه (۴) به حوزۀ فرکانس، داریم:

$$\nabla^2 p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p \qquad (۵)$$

که در آن، p فشارِ سیال در حوز ه فرکانس، ω فرکانسِ زاویه‌ای و x، y و z مختصاتِ مکانی هستند. همانطور که

مشاهده می‌شود، با انتقال به حوزه فرکانس، معادله (۵)، نه شاملِ t که حاوی ω خواهد بود.

از آن‌جا که مسأله موردنظر یک بعدی است، فشار تابعِ y و z نیست، لذا:

$$\frac{d^2 p}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p=0 \tag{۶}$$

معادلهٔ (۶)، یک معادله دیفرانسیلِ معمولی (و نه جزئی) است که پاسخِ عمومیِ آن به فرم رابطه (۷) است:

$$p(x)=c_1\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)+c_2\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{۷}$$

در آن $\omega=2\pi f$ است. ω فرکانسِ زاویه ای و f فرکانس نامیده می‌شود که واحدِ آن هرتز است.

پس از بررسیِ بخشِ سیال، به سراغِ بخشِ سازه‌ایِ مسأله اندرکنشی می‌رویم که در اینجا، یک سیستمِ جرم و فنر است. معادله حاکم بر آن، با توجه به شکل ۱، به‌صورتِ رابطه (۸) نوشته می‌شود:

$$m\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}+k\bar{u}=\bar{p}(x=0)A \tag{۸}$$

در رابطه (۸)، m جرمِ پیستون، $\bar{u}$ جابجایی در جهتِ محورِ x و k سختیِ فنر است. طرفِ راستِ معادله فوق، نیروی خارجی وارد بر سیستمِ جرم و فنر است که برابرِ حاصل‌ضربِ فشارِ سیال در سطحِ مقطعِ استوانه است؛ همچنین A سطحِ مقطعِ استوانه است که در ادامه، برابرِ واحد فرض می‌شود. این معادله هم به حوزه فرکانس منتقل می‌شود:

$$\left(-m\omega^2+k\right)u=p(x=0) \tag{۹}$$

با استفاده از معادله (۷) که معادله فشارِ سیال در حوزه فرکانس است، مقدارِ فشارِ سیال در $x=0$، با جایگذاریِ مقدارِ x در آن برابر c_2 بدست می‌آید. بنابراین:

$$\left(k-m\omega^2\right)u=c_2 \tag{۱۰}$$

پس از بررسیِ معادلاتِ حاکم بر سیال و سازه، به منظورِ دستیابی به مجهولات، نوبت به اعمالِ شرایطِ مرزیِ ابتدا و انتهای استوانه حاویِ سیال می رسد. می‌توان ثابت کرد، شرطِ مرزیِ مرزِ خیسِ انعطاف پذیر به صورتِ برابریِ شارِ فشارِ سیال با قرینه حاصلضربِ چگالیِ سیال در شتابِ سازه در جهتِ بردارِ نرمالِ عمود بر مرز تعریف می‌شود. خاطر نشان می‌کند، شتابِ سازه در حوزه فرکانس برابر $a_n=-\omega^2 u$ است؛ بنابراین، شرطِ مرزیِ ابتدای استوانه بصورتِ زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{\omega}{c}c_1=-\rho\omega^2 u \tag{۱۱}$$

بدیهی است:

$$c_1=-\rho c\omega u \tag{۱۲}$$

شرطِ مرزی سمت راستِ استوانه که همان انتهای بسته استوانه است، با استفاده از رابطهٔ (۱۳) بیان می‌شود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L}=\frac{\omega}{c}\left(c_1\cos\frac{\omega L}{c}-c_2\sin\frac{\omega L}{c}\right)=0 \tag{۱۳}$$

حال، مقادیرِ c_1 و c_2 که در روابطِ (۱۰) و (۱۲) بدست آمده‌اند را در معادلهٔ (۱۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$-\rho c\omega u\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)=\left(k-m\omega^2\right)u\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \tag{۱۴}$$

با ساده کردنِ رابطه فوق، داریم:

$$\sin\left(\frac{2\pi f L}{c}\right)+\frac{2\pi f\rho c}{k-4\pi^2 f^2 m}\cos\left(\frac{2\pi f L}{c}\right)=0 \tag{۱۵}$$

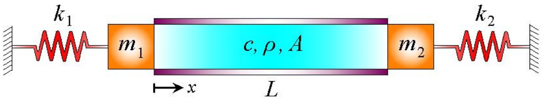
معادلهٔ (۱۵)، دقیقاً همان معادله (۱۰۷) مرجع [۲۵] است. با حلِ معادله غیرخطیِ فوق، f یا همان فرکانسِ طبیعی به دست می‌آید که تنها مجهولِ آن است؛ همچنین با جایگذاریِ c_1 و c_2 در معادله (۷)، شکل مودهای سیال نیز قابلِ محاسبه است:

$$p(x)=-\rho c\omega u\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)+\left(k-m\omega^2\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \tag{۱۶}$$

پس از استخراجِ پاسخِ دقیق و به فرمِ بسته نخستین مسأله مطروحه در مقاله که عملاً بازتولیدِ پاسخ مندرج در مرجع [۲۵] بود، به سراغِ معرفی و حلِ دقیقِ دومین مسألهٔ موردِ بحث در مقاله می رویم. خاطر نشان می‌سازد، پس از پایان یافتنِ روندِ دست یابی به پاسخهای فرم بسته، فرایندِ حلِ هر دو مسأله به روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی را آغاز خواهیم کرد.

۳-۲- استوانه حاویِ سیال با دو سیستم جرم و فنر

حال، استوانه مورد نظر را در حالتی که در دو انتها دارای سیستمِ جرم و فنر است ، در نظر می‌گیریم.



شکل ۲- استوانهٔ یک بعدی حاوی سیال با دو سیستم جرم و فنر

در این حالت معادله حاکم بر سیالِ تراکم‌پذیر تغییری نخواهد کرد و فقط معادلاتِ حاکم بر سازه دستخوشِ تغییر خواهند شد که عبارتند از یک معادله برای سیستمِ جرم و فنرِ ابتدای استوانه و یک معادله برای سیستمِ جرم و فنرِ انتهای استوانه. معادله سیستمِ جرم و فنرِ سمتِ چپ بصورتِ زیر نوشته می‌شود:

$$m_1 \frac{d^2\bar{u}_1}{dt^2} + k_1\bar{u}_1 = \bar{p}(x=0)A \qquad (۱۷)$$

که در آن، m_1 جرمِ پیستون و k_1 سختیِ فنرِ سیستمِ تکیه‌گاهیِ ابتدای استوانه است و $\bar{u}_1$ جابجاییِ سازه در جهتِ محورِ x است. طرفِ راستِ معادلهٔ فوق همانطور که در بخشِ ۳ـ۱ بدان اشاره شد، نیروی خارجی وارد بر سیستمِ جرم و فنر و برابر با حاصل‌ضربِ فشارِ سیال در سطحِ مقطعِ استوانه است؛ همچنین، A سطحِ مقطعِ استوانه است که برابرِ واحد فرض می‌شود. با انتقالِ معادله (۱۷) به حوزه فرکانس، داریم:

$$\left(-m_1\omega^2 + k_1\right)u_1 = p(x=0) = c_2 \qquad (۱۸)$$

چون معادله حاکم بر سیال تغییر نکرده است، با قرار دادنِ $x=0$ در رابطه (۷)، مقدارِ فشار در $x=0$ برابرِ c_2 بدست می‌آید. در ادامه، معادله حاکم بر سیستمِ جرم و فنر در انتهای استوانه بصورتِ رابطه (۱۹) نوشته می‌شود:

$$m_2 \frac{d^2\bar{u}_2}{dt^2} + k_2\bar{u}_2 = \bar{p}(x=l)A \qquad (۱۹)$$

در این رابطه نیز m_2 جرمِ پیستون، k_2 سختیِ فنرِ سیستمِ و $\bar{u}_2$ جابجاییِ سازه در خلافِ جهتِ محورِ x است. رابطه (۱۹) نیز به حوزه فرکانس منتقل می‌شود:

$$\left(-m_2\omega^2 + k_2\right)u_2 = p(x=L) \qquad (۲۰)$$

در ادامه، با استفاده از رابطه (۷) فشارِ سیال در انتهای استوانه، با قرار دادنِ $x=L$ در آن به دست می‌آید. بنابراین:

$$\left(k_2 - m_2\omega^2\right)u_2 = c_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) + c_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) \qquad (۲۱)$$

اینک نوبتِ اعمالِ شرایطِ مرزی است تا مقادیرِ c_1 و c_2 بدست آیند. شرطِ مرزیِ ابتدای استوانه را با توجه به آنچه در بخشِ ۳ـ۱ گفته شد، می‌توان بصورتِ زیر نوشت:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\omega}{c}c_1 = -\rho\omega^2 u_1 \qquad (۲۲)$$

در نتیجه:

$$c_1 = -\rho c\omega u_1 \qquad (۲۳)$$

شرطِ مرزیِ انتهای استوانه که در این مسأله جدید، دیگر صلب و بسته نبوده، بلکه انعطاف‌پذیر است، به فرمِ زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L} = \frac{\omega}{c}\left(c_1 \cos\frac{\omega L}{c} - c_2 \sin\frac{\omega L}{c}\right) = \rho\omega^2 u_2 \qquad (۲۴)$$

با جایگذاریِ مقادیرِ c_1 و c_2 که از روابطِ (۱۸) و (۲۳) نتیجه شده‌اند، در معادلاتِ (۲۱) و (۲۴)، به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$-\rho c\omega\, u_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) + \left(k_1 - m_1\omega^2\right)u_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) = \left(k_2 - m_2\omega^2\right)u_2 \qquad (۲۵)$$

$$-\rho c\omega u_1 \cos\frac{\omega L}{c} - \left(k_1 - m_1\omega^2\right)u_1 \sin\frac{\omega L}{c} = \rho c\omega u_2 \qquad (۲۶)$$

معادلاتِ فوق یک دستگاهِ دو معادله و دو مجهولِ همگن به صورتِ زیر تشکیل می دهند:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

درایه‌های ماتریس ضرائب عبارتند از:

$$a_{11} = -\rho c\,\omega \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) - \left(k_1 - m_1\omega^2\right)\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \qquad (۲۸)$$

$$a_{12} = -\rho c\omega \qquad (۲۹)$$

$$a_{21} = -\rho c\,\omega \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) + \left(k_1 - m_1\omega^2\right)\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \qquad (۳۰)$$

$$a_{22} = -\left(k_2 - m_2\omega^2\right) \qquad (۳۱)$$

دستگاهِ همگنِ (۲۷) فقط هنگامی پاسخِ غیرصفر دارد که دترمینانِ ماتریسِ ضرایبِ آن برابرِ صفر باشد. با برابرِ صفر قرار دادنِ دترمینانِ دستگاهِ فوق، مقدارِ ω یا فرکانسِ طبیعیِ سیستم بدست می‌آید که تنها مجهولِ آن است؛ همچنین با جایگذاریِ مقادیرِ c_1 و c_2 در معادله (۷) که همان معادله فشارِ سیال است، شکل مودِ سیال نیز قابلِ محاسبه می‌شود.

بدین ترتیب، حلِ به فرمِ بستهٔ هر دو مسأله اندرکنشیِ موردِ بررسی در مقاله ارائه شد. در بخش بعد، روندِ حلِ هر دو مسألهٔ مزبور، به روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی تشریح خواهد شد.

۴- حلِ مسأله با استفاده از DTM

پس از بدست آوردنِ پاسخِ دقیقِ معادلاتِ حاکم بر استوانهٔ یک‌بعدیِ حاویِ سیال در دو حالتِ تکیه‌گاهیِ مختلف که در بخشِ ۳ شرح داده شد، در بخشِ پیش رو قصد داریم، همان مسائل را با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی حل کنیم.

۴-۱- استوانهٔ حاویِ سیال با یک سیستم جرم و فنر

در این بخش، نخستین مسألهٔ اندرکنشِ سازه ـ سیالِ موردِ بحث در مقاله که همانا، استوانه یک بعدیِ حاوی سیالِ تراکم‌پذیر و شاملِ یک سیستمِ جرم و فنر بود ، با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی حل می شود و در پایان، نتایج بدست آمده با نتایجِ موجود در مرجعِ [۲۵] مقایسه می‌شود. لازم به یادآوری است، معادله دیفرانسیلِ حاکم بر بخشِ سیالِ مسأله اندرکنشیِ موردِ نظر در قالبِ رابطهٔ (۶) ارائه شده است. با استفاده از خواص تبدیلِ دیفرانسیلی که در جدولِ ۱ آمده است، معادله مزبور به فرمِ زیر تبدیل می‌شود:

$$(k+1)(k+2)P[k+2]+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[k]=0 \qquad (۳۲)$$

که با اندکی ساده‌سازی، رابطه بازگشتیِ زیر از آن منتج می‌شود:

$$P[k+2]=-\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{(k+1)(k+2)}P[k] \qquad (۳۳)$$

با جایگذاریِ مقادیرِ عددی برای k روابطِ میانِ $P[k]$ های مختلف بدست می‌آید:

$$k=0\rightarrow P[2]=-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[0] \qquad (۳۴)$$

$$k=1\rightarrow P[3]=-\frac{1}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[1] \qquad (۳۵)$$

$$k=2\rightarrow P[4]=-\frac{1}{12}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[2] \qquad (۳۶)$$

با قرار دادنِ مقدارِ $P[2]$ که در نخستین جایگذاری محاسبه شده است، مقدارِ $P[4]$ بدست می‌آید:

$$P[4]=\frac{-1}{12}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\times\frac{-1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[0]=\frac{1}{24}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 P[0] \qquad (۳۷)$$

با ادامه روندِ جایگذاری‌ها داریم:

$$k=3\rightarrow P[5]=-\frac{1}{20}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[3] \qquad (۳۸)$$

به صورت مشابه، با قرار دادنِ مقدارِ $P[3]$ که در گامِ دوم به دست آمده است، مقدارِ $P[5]$ محاسبه می‌شود:

$$P[5]=\frac{-1}{20}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\times\frac{-1}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 P[1]=\frac{1}{120}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 P[1] \qquad (۳۹)$$

واضح است برای مقادیرِ مختلفِ k، $P[k]$ ها به $P[0]$ و $P[1]$ وابسته می‌شوند؛ بنابراین در حالتِ کلی روابطِ زیر نتیجه می‌شوند:

$$P[2k]=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k}P[0] \qquad (۴۰)$$

$$P[2k+1]=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k}P[1] \qquad (۴۱)$$

از طرفِ دیگر، تابعِ فشارِ سیال را می توان با استفاده از تعریفِ اساسیِ تبدیلِ دیفرانسیلی ، رابطهٔ (۳)، به صورتِ زیر نوشت:

$$p(x)=P[0]+P[1]x+P[2]x^2+\ldots \qquad (۴۲)$$

با جایگذاریِ $P[k]$ ها از دورابطه (۴۰) و (۴۱) در رابطه (۴۲)، $p(x)$ بر حسبِ $P[0]$ و $P[1]$ بدست خواهد آمد:

$$p(x)=P[0]\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2x^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4x^4+\ldots\right)+$$
$$P[1]\left(x-\frac{1}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2x^3+\frac{1}{120}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4x^5+\ldots\right) \qquad (۴۳)$$

در ادامه به سراغِ دو شرطِ مرزیِ سیال و معادله حاکم بر سازه می‌رویم تا با ارضاءِ آن‌ها بتوانیم $P[0]$ و $P[1]$ را بدست آوریم. نخستین شرطِ مرزیِ بنا به معادله (۱۱) عبارتست از:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=-\rho\omega^2u \qquad (۴۴)$$

با استفاده از تعریفِ تبدیل دیفرانسیلی داریم:

$$\mathrm{DT}\left[p'(0)\right]=P[1]\rightarrow P[1]=-\rho\omega^2u \qquad (۴۵)$$

همچنین بر اساسِ معادلهٔ حاکم بر سازه داریم:

$$p(0)=\left(k-m\omega^2\right)u \qquad (۴۶)$$

برای یافتنِ جملـه سمتِ چپِ رابطه (۴۶)، باید در رابطه (۴۲) به جای x مقدار 0 را قرار دهیم. بنابراین:

$$\mathrm{DT}\left[p(0)\right]=P[0] \qquad (۴۷)$$

لذا:

$$P[0]=\left(k-m\omega^2\right)u \qquad (۴۸)$$

و در پایان، شرطِ مرزیِ انتهای استوانه نیز بر اساسِ رابطـه (۱۳) بصورتِ زیر است:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \qquad (۴۹)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴۳) و جایگذاریِ $P[0]$ و $P[1]$ که در روابطِ (۴۵) و (۴۸) محاسبه شده‌اند، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\left(k-m\omega^2\right)u\left(-L\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\frac{L^3}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4+\ldots\right)-$$
$$\rho\omega^2u\left(1-\frac{L^2}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\frac{L^4}{24}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4+\ldots\right)=0 \qquad (۵۰)$$

با حذفِ u از معادله فوق و قرار دادنِ پارامترهای معلوم مسأله در آن، تنها مجهول معادله که مقدارِ ω یا همان فرکانسِ طبیعیِ سیستم است، از حلِ معادل ه (۵۰) بدست می‌آید.

۴-۲- استوانۀ سیال حاویِ با دو سیستم جرم و فنر

پس از حلِ نخستین مسأل ه مطروحه در مقاله به روشِ تبدیل دیفرانسیلی، به سراغ حلِ دومین مسأله، یعنی استوانه دارای دو سیستمِ جرم و فنر، به روش مزبور می‌رویم. از آنجا که معادله حاکم بر سیال در مسأله دوم دقیقاً همان معادله حاکم بر سیال در مسأله اول است، در این حالت، رابطه بازگشتی تغییری نخواهد کرد؛ بنابراین رابطه بازگشتی مشابه رابطه (۳۳) است:

$$P[k+2]=-\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{(k+1)(k+2)}P[k] \qquad (۵۱)$$

و همانطور که در بخشِ قبل دیدیم، رابط ه بین $P[k]$ های مختلف به صورتِ زیر بدست می‌آید:

$$P[2k]=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k}P[0] \qquad (۵۲)$$

$$P[2k+1]=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k}P[1] \qquad (۵۳)$$

در ادامه، می‌بایست دو شرطِ مرزیِ سیال را به همراهِ دو معادلۀ حاکم بر سازه، در روندِ حلِ مسأله وارد ساخت. شرطِ مرزی در ابتدای استوانه به فرمِ زیر است:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}=-\rho\omega^2u_1 \qquad (۵۴)$$

که در آن u_1 جابجاییِ ابتدای سازه در جهتِ محورِ x است. با استفاده از تعریفِ تبدیل دیفرانسیلی رابطه (۵۴) به فرمِ زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathrm{DT}\left[p'(0)\right]=P[1]\rightarrow P[1]=-\rho\omega^2u_1 \qquad (۵۵)$$

همچنین معادله حاکم بر سازه در ابتدای استوانه بصورتِ زیر نوشته می‌شود:

$$\left(-m_1\omega^2+k_1\right)u_1=p(x=0)=P[0] \qquad (۵۶)$$

همچنین، شرطِ مرزیِ انتهای استوانه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L}=\rho\omega^2u_2 \qquad (۵۷)$$

با اعمالِ تبدیل دیفرانسیلی بر طرفینِ رابط ه فوق، داریم:

$$\mathrm{DT}\left[p'(L)\right]=P[1]+2P[2]L+3P[3]L^2+\ldots \qquad (۵۸)$$

$$P[1]+2P[2]L+3P[3]L^2+4P[4]L^3+\ldots=\rho\omega^2u_2 \qquad (۵۹)$$

با جایگذاریِ مقادیرِ مختلفِ $P[k]$ در رابطه (۵۹) بر حسبِ $P[0]$ و $P[1]$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$P[0]\left(\frac{-2L}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\frac{4L^3}{24}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4+\ldots\right)+$$
$$P[1]\left(1+\frac{-3L^2}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\ldots\right)=\rho\omega^2u_2 \qquad (۶۰)$$

معادله حاکم بر سازه در انتهای استوانه نیز به صورتِ زیر بیان می‌شود:

$$\left(-m_2\omega^2+k_2\right)u_2=p(x=L)=$$
$$P[0]+P[1]L+P[2]L^2+P[3]L^3+\ldots \qquad (۶۱)$$

در معادلۀ فوق نیز با جایگذاریِ مقادیرِ مختلفِ $P[k]$ بر حسبِ $P[0]$ و $P[1]$، خواهیم داشت:

$$P[0]\left(1-\frac{L^2}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\ldots\right)+P[1]\left(L-\frac{L^3}{6}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\ldots\right)$$
$$=\left(-m_2\omega^2+k_2\right)u_2 \qquad (۶۲)$$

در نتیجه، چهار معادله (۵۵)، (۵۶)، (۶۰) و (۶۲)، به همراهِ چهار مجهولِ $P[0]$، $P[1]$، u_1 و u_2 دستگاهِ چهار معادله و چهار مجهولِ باز هم همگنِ زیر را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P[0] \\ P[1] \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۶۳)$$

که درایه‌های ماتریسِ ضرایبِ آن به قرارِ زیر خواهد بود:

$$a_{11}=\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\times\frac{L^{(2k-1)}}{(2k-1)!}\times\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k} \qquad (۶۴)$$

$$a_{12}=\sum_{k=0}^{N}(2k+1)\frac{(-1)^{(k+2)}}{(2k+1)!}\times\left(\frac{L\omega}{c}\right)^{2k} \qquad (۶۵)$$

$$a_{13}=0 \qquad (۶۶)$$

$$a_{14}=-\rho\omega^2 \qquad (۶۷)$$

$$a_{21}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\times\frac{L^{(2k)}}{(2k)!}\times\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k} \qquad (۶۸)$$

$$a_{22}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\times L^{(2k+1)}\times\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2k} \qquad (۶۹)$$

$$a_{23}=0 \qquad (۷۰)$$

$$a_{24}=k_2-m_2\omega^2$$ (۷۱)

$$a_{31}=-1$$ (۷۲)

$$a_{32}=0$$ (۷۳)

$$a_{33}=k_1-m_1\omega^2$$ (۷۴)

$$a_{34}=0$$ (۷۵)

$$a_{41}=0$$ (۷۶)

$$a_{42}=1$$ (۷۷)

$$a_{43}=\rho\omega^2$$ (۷۸)

$$a_{44}=0$$ (۷۹)

دستگاهِ همگنِ (۶۳) تنها هنگامی پاسخِ غیرصفر دارد که دترمینانِ ماتریسِ ضرایبِ آن صفر باشد. مشابهِ مسألـه نخست، با برابرِ صفر قرار دادنِ دترمینانِ ماتریسِ فوق، ω یا فرکانسِ طبیعیِ سیستم بدست می‌آید که تنها مجهولِ آن است.

۵- نتایج عددی

در این بخش، نتایجِ حاصل از اعمالِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی بر مسأله موردِ بررسی در هر دو حالتِ تکیه گاهی با نتایجِ حلِ دقیقِ آن ها مقایسه می‌شود. لازم بذکر است، در مسأله اول، نتایج به دست آمده با مرجع[۲۵] نیز مقایسه می‌شود که حلِ همان مسأله را با روشِ اجزاءِ محدود ارائه کرده است؛ همچنین، نتایج عددی برای سیال با مشخصات $\rho=1000(kg/m)$، $c=1500(m/s)$ و $L=3(m)$ و سازه با مشخصاتِ $k=4.9348\times10^8(N/m)$ و $m=200(kg)$ بدست خواهد آمد که دقیقاً همان داده های مرجعِ[۲۵] است.

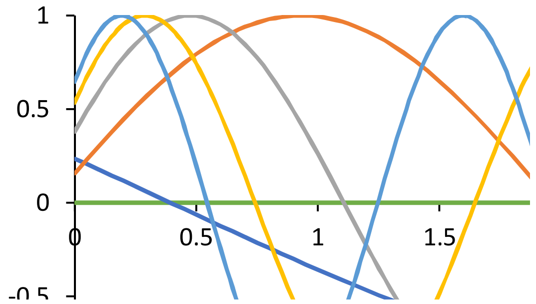
۵-۱- مسأله اول

در جدولِ ۲ فرکانسِ طبیعیِ شش مودِ اولِ نوسان که با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی (DTM) در بخشِ ۴-۱ محاسبه شده است و مقادیرِ بدست آمده از حلِ دقیقِ سیستم که در بخشِ ۳ـ۱ شرح داده شد، با نتایجِ حاصل از حلِ آن با روشِ اجزاءِ محدود مقایسه شده است که در مرجعِ[۲۵] آمده است.

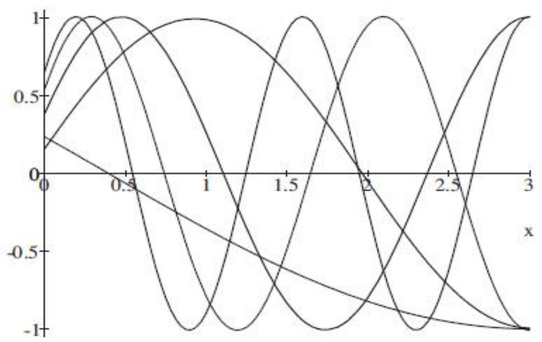
جدول ۲- فرکانسِ طبیعیِ پنج مودِ اولِ نوسان سیستم

فرکانسِ طبیعی (Hz)			شکل‌مود
مرجع [۲۱]	DTM	حل دقیق	
۰	۰	۰	مود۱
۱۴۴/۰	۱۴۳/۹۷۴	۱۴۳/۹۷۴	مود۲
۳۶۲/۴	۳۶۲/۴۳۹	۳۶۲/۴۳۹	مود۳
۵۹۴/۱	۵۹۴/۰۶۷	۵۹۴/۰۶۷	مود۴
۸۳۰/۱	۸۳۰/۱۲۸	۸۳۰/۱۲۸	مود۵
۱۰۶۹/۱	۱۰۶۹/۰۹	۱۰۶۹/۰۹	مود۶

همچنین، در شکلِ ۳ مودهای نوسانِ سیستم با استفاده از حلِ دقیقِ ارائه شده در بخشِ ۳-۱ و در شکلِ ۴ همان مودها به نقل از مرجعِ [۲۵] نشان داده شده است.



شکل ۳- شش مودِ اولِ استوانـه یک سر فنر با حل دقیق



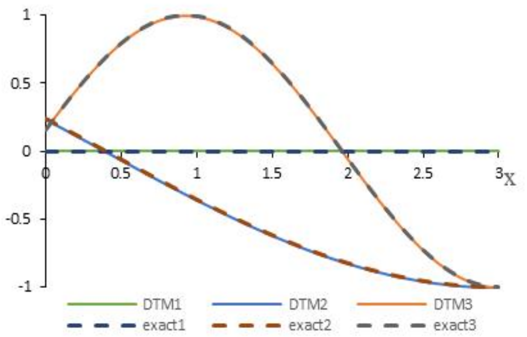
شکل ۴- شش مودِ اولِ نوسانِ استوانه یک سر فنر[۲۱]

شکلِ ۵ سه مودِ اولِ نوسانِ سیستم را نشان می دهد که با حلِ دقیق و نیز با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی بدست آمده‌اند. در شکلِ ۶ مودهای چهارم، پنجم و ششمِ حاصل از حلِ دقیق و روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی رسم شده است.

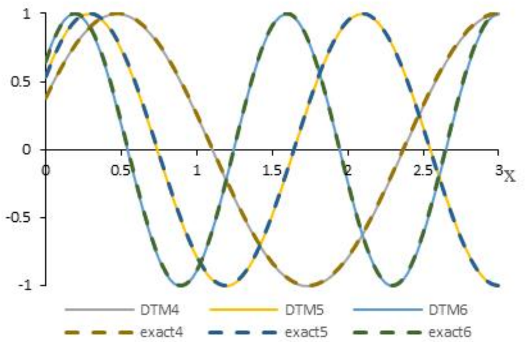
شکلِ ۷ همگراییِ پاسخ‌ها را با افزایشِ تعدادِ جملاتِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی، به عنوانِ نمونه در مودِ چهارمِ سیستم نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایشِ تعدادِ جملات، شکلِ مود همگرا شده و به پاسخِ دقیق نزدیک می‌شود. بدیهی است، پس از همگرا شدنِ پاسخ‌ها، دیگر افزایشِ تعدادِ جملاتِ سری، تأثیری در دقتِ آنها ندارد.

۵-۲- مسألهٔ دوم

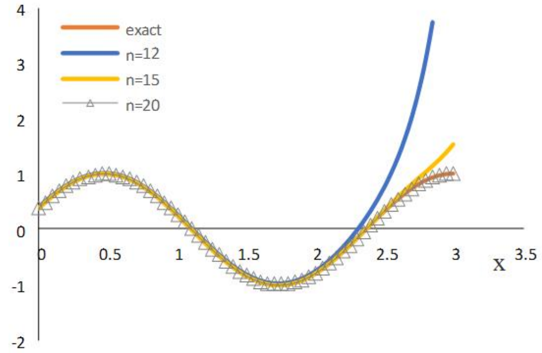
در این بخش، برای بدست آوردن نتایج عددی، از همان مشخصاتِ سازه و سیالِ بخشِ قبل استفاده شده و جرم و سختیِ سیستمِ جرم و فنرِ انتهای استوانه (سمتِ راست) نیز



شکل ۵- سه مودِ اولِ نوسان از حلِ دقیق و DTM



شکل ۶- سه مودِ دوم نوسان از حلِ دقیق و DTM



شکل ۷- شکلِ مودِ چهارم با تعداد جملاتِ مختلف DTM

برابر همان جرم و سختیِ ابتدای استوانه (سمتِ چپ) در نظر گرفته می‌شود. فرکانس‌های طبیعیِ پنج مودِ اولِ سیستمِ اندرکنشی که هم از حلِ به فرمِ بسته و هم از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی بدست آمده‌اند، در جدولِ ۳ درج شده است. نکته جالبِ توجه و قابلِ ذکر، کمتر شدنِ فرکانس های هر شش مودِ مندرج در جدولِ ۳ در مقایسه با جدولِ ۲ است که به دلیل نرمتر شدنِ سیستم (تبدیلِ تکیه گاهِ صلبِ سمتِ راستِ استوانه به تکیه‌گاهی انعطاف‌پذیر)، می‌تواند نشان‌دهنده درستیِ پاسخ‌ها باشد.

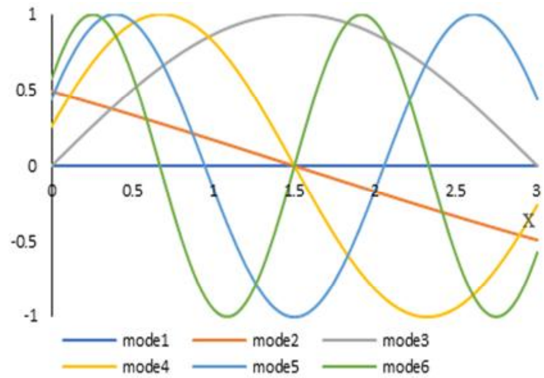
برای صحت‌سنجیِ بیشترِ نتایجِ مربوط به مسأله استوانه دو سر فنر، با ثابت نگه داشتنِ سختیِ فنرِ سمتِ چپ و افزایشِ سختیِ فنرِ سمتِ راست، تکیه گاهِ انتهایی به حالتِ صلب میل می‌کند. بدیهی است، نتایج این حالت، می‌بایست به نتایجِ بدست آمده در مسأله اول نزدیک شود که شرطِ مرزیِ راستِ آن صلب بود (جدولِ ۴)؛ همچنین، با افزایشِ

جدول ۳- فرکانسِ طبیعیِ شش مودِ اولِ نوسان مسألهٔ دوم

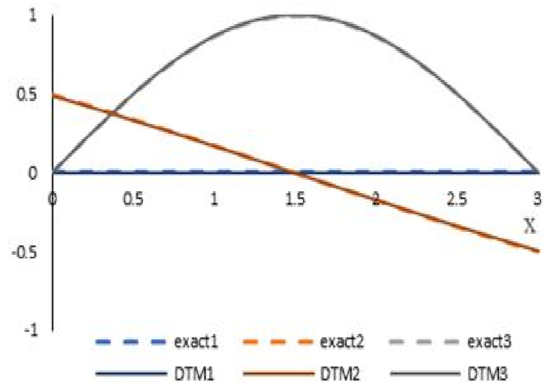
شکل‌مود	فرکانسِ طبیعی (Hz) حل دقیق	فرکانسِ طبیعی (Hz) DTM
مود ۱	۰	۰
مود ۲	۸۲/۲۱۳۲	۸۲/۲۱۳۲
مود ۳	۲۵۰	۲۵۰
مود ۴	۴۵۸/۱۰۵	۴۵۸/۱۰۵
مود ۵	۶۷۷/۴۵۴	۶۷۷/۴۵۴
مود ۶	۹۰۲/۹۶۳	۹۰۲/۹۶۳

تدریجیِ سختیِ فنرِ سمتِ چپ و ثابت نگاه داشتنِ سختیِ فنرِ سمتِ راست، شرطِ مرزیِ سمتِ چپِ استوانه به حالتِ صلب نزدیک می‌شود که باز هم به دلیلِ تقارنِ مسأله، باید پاسخ‌ها مشابه نتایجِ مسألهٔ اول شود (جدول ۵).

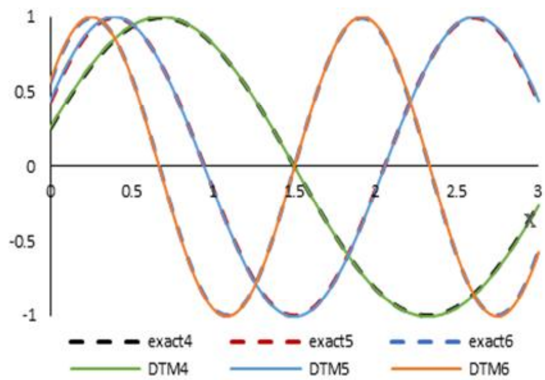
شکلِ ۸، شکلِ مودهای نوسانِ مسأله دوم را نشان می‌دهد که از حلِ دقیق بدست آمده است؛ همچنین، در شکلِ ۹ و ۱۰، سه مودِ نوسان اول و دوم، با استفاده از حلِ دقیق و روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی رسم شده اند.



شکل ۸- شکلِ مودهای استوانهٔ دو سر فنر با حل دقیق



شکل ۹- سه مودِ اولِ نوسان از حلِ دقیق وDTM



شکل ۱۰- سه مودِ دوم نوسان از حلِ دقیق و DTM

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرایندِ تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ دو سیستمِ کلاسیکِ اندرکنشیِ سازه ـ سیال با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی تشریح شد. برای این منظور، پس از مرورِ مختصرِ مبانیِ نظریِ روشِ مزبور و دستیابی به پاسخ های فرمِ بسته معادلاتِ حاکم بر هر دو سیستمِ اندرکنشی که با هدفِ صحت سنجیِ پاسخ‌های حاصل از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی صورت گرفت، روندِ حل مسأله با DTM، شاملِ یافتنِ معادل ه بازگشتی، استخراجِ رابط ه بینِ مجهولاتِ جدید بر اساسِ شمارنده های

جدول ۴- فرکانسِ طبیعی با افزایشِ سختی فنر سمتِ راست

شکل‌مود	فرکانسِ طبیعی (Hz) $100k_2$	$1000k_2$	$10000k_2$
مود ۱	۰	۰	۰
مود ۲	۱۴۲/۲۴۶	۱۴۳/۸	۱۴۳/۹۵۷
مود ۳	۳۵۷/۳۹	۳۶۱/۹۳۶	۳۶۲/۳۸۹
مود ۴	۵۸۵/۲۹۳	۵۹۳/۲۱۸	۵۹۳/۹۸۳
مود ۵	۸۱۷/۰۴۸	۸۲۸/۹۱۷	۸۳۰/۰۰۸
مود ۶	۱۰۵۰/۸۲	۱۰۶۷/۵۱	۱۰۶۸/۹۴

جدول ۵- فرکانسِ طبیعی با افزایشِ سختی فنر ابتدای سازه

شکل‌مود	فرکانسِ طبیعی (Hz) $100k_1$	$1000k_1$	$10000k_1$
مود ۱	۰	۰	۰
مود ۲	۱۴۲/۲۴۶	۱۴۳/۸	۱۴۳/۹۵۷
مود ۳	۳۵۷/۳۹	۳۶۱/۹۳۶	۳۶۲/۳۸۹
مود ۴	۵۸۵/۲۹۳	۵۹۳/۲۱۸	۵۹۳/۹۸۳
مود ۵	۸۱۷/۰۴۸	۸۲۸/۹۱۷	۸۳۰/۰۰۸
مود ۶	۱۰۵۰/۸۲	۱۰۶۷/۵۱	۱۰۶۸/۹۴

زوج و فردِ آنها و بالاخره، شیوه اعمالِ شرایطِ مرزی و دستیابی به معادله فرکانسیِ دو سیستمِ اندرکنشی توضیح داده شد.

از آنجایی که روشِ تبدیل دیفرانسیلی در حلِ مسائل اندرکنشی کم‌تر بکار رفته است، هدفِ اصلیِ این مقاله، بکاربستنِ روش مزبور در حل دو مسأله کلاسیکِ دارای حلِ دقیق بود تا با صحت‌سنجیِ روش و نتایجِ حاصل از آن، بتوان امکانِ استفاده از DTM را برای مسائلِ اندرکنشی ای نیز فراهم آورد که حل دقیقی برای آن‌ها وجود ندارد و از مزایای آن (مانند عدمِ نیاز به تضعیف و گسسته سازی معادله دیفرانسیل و همچنین شبکه‌بندی حوزه حل مسأله یا محاسبه انتگرال‌های پیچیده که لازمه روش‌هایی چون اجزاء محدود و المان‌های مرزی است) بهره برد.

لازم بذکر است، هنگامی که پاسخِ معادله دیفرانسیل تابعی است که در فرضیات قضیه تیلور می‌گنجد و به عنوانِ مثال، فاقدِ تکینگی یا همان singularity است (مانند آنچه در این مقاله با آن مواجهیم)، پاسخِ حاصل از روش تبدیل دیفرانسیلی، در نقاطی نه چندان دور از مرکزِ بسطِ تیلور، به پاسخِ دقیق همگرا می شود و از دقت بسیار بالایی برخوردار خواهد بود.

دقتِ مورد اشاره در بند قبل، در بخش نتایجِ عددی مقاله مورد بررسی قرار گرفت. همانطور که مشاهده شد، نتایجِ عددی که شاملِ فرکانس های طبیعی و شکل مودهای هر دو سیستمِ اندرکنشی بودند، همگی از همگراییِ مناسب و دقتِ بالای روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی در حل ا ین دو مسألهٔ اندرکنشی حکایت داشتند؛ همچنین، «آزمون همگراییِ» DTM که با هدفِ رسیدن به تعداد جملاتِ کافیِ سریِ پاسخ برای دستیابی به پاسخی مناسب پیشنهاد می‌شود، در مقاله حاضر صورت گرفت که نمونه‌ای از نتایجِ حاصل از آن در شکل ۷ قابل مشاهده است.

افزون بر اینها، نتایجِ عددیِ بدست آمده از هر دو حلِ تحلیلی و نیمه‌تحلیلیِ ارائه شده در مقاله، بر شماری از دریافت‌های فیزیکیِ منتج از مدلسازیِ ریاضیاتیِ مسائلِ دینامیکی صحه می‌گذارند. به عنوان نمونه، انعطاف‌پذیر شدنِ مرزِ صلبِ واقع در سمتِ راستِ استوانه شکل ۱ و تبدیل شدنِ آن به شکلِ ۲ که به منزله کاهشِ سختیِ کل سیستمِ اندرکنشیِ سازه ـ سیال است، سببِ کاهشِ ۴۳ درصدیِ نخستین فرکانسِ ناصفرِ مجموعه (بیشترین میزانِ کاهش در شش فرکانسِ موردِ بررسی) می گردد؛ همچنین، افزایشِ سختیِ فنرِ سمت راستِ در استوانه دارای دو درپوش انعطاف‌پذیر (شکل ۲)، آن سیستمِ اندرکنشی را عملاً به استوانه دارای یک درپوشِ منعطف (شکل ۱) بدل می‌کند.

۷- مراجع

[1] Samii A, Lotfi V (2007) Comparison of coupled and decoupled modal approaches in seismic analysis of concrete gravity dams in time domain. Finite Elem Anal Des 43: 1003-1012.

[2] Aftabi Sani A, Lotfi V (2010) Dynamic analysis of concrete arch dams by ideal-coupled modal approach. Eng Struct 32: 1377-1383.

[3] Rezaiee-Pajand M, Aftabi Sani A and Kazemiyan M.S (2017) Free vibration analysis of concrete arch dams by quadratic ideal-coupled method. Struct Eng MECH 65: 69-79.

[4] Hojati M, Lotfi V (2011) Dynamic analysis of concrete gravity dams utilizing two-dimensional modified efficient fluid hyper-element. Adv Struct Eng 14: 1093-1106.

[5] Aftabi Sani A, Lotfi V (2010) Dynamic analysis of concrete arch dams by ideal-coupled modal approach. Eng Struct 32: 1377-1383.

[6] Chopra AK (2012) Earthquake analysis of arch dams: factors to be considered. J Struct Eng-ASCE 138: 205-214.

[7] Kim JK, Koh HM, Kwahk IJ (1996) Dynamic response of rectangular flexible fluid containers. ASCEJ Eng Mech 122(9): 807-817.

[8] Chen JZ, Kianoush MR (2009) Generalized SDOF system for seismic analysis of concrete rectangular liquid storage tanks. Eng Struct 31: 2426-2435.

[9] Ghaemmaghami AR, Kianoush MR (2010a) Effect of wall flexibility on dynamic of concrete rectangular liquid storage tanks under horizontal and vertical ground motions. J Struct Eng 136(4): 441-451.

[10] Rezaiee-Pajand M, Aftabi sani A, Kazemiyan MS (2016) Analytical solution for free vibration of flexible 2D rectangular tanks. Ocean Eng 122: 118-135.

[11] Lakis AA, Bursuc G, Toorani MH (2009) Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells. Nucl Eng Des 239(7): 1193-11206.

[12] Khojasteh Kashani B, Aftabi Sani A (2016) Free vibration analysis of horizontal cylindrical shells including sloshing effect utilizing polar finite elements. Euro J Mech A/Solids 58: 187-201.

[13] Ebrahimi Mamaghani A, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee M (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. Int J Mech Sci 17.

[14] Nourifar M, Aftabi Sani A, Keyhani A (2017) Efficient multi-step differential transform method: Theory and its application to nonlinear oscillators. Commun Nonlinear Sci 14: 61-74.

[15] Jandaghi Semnani S, Attarnejad R, Kazemi Firouzjaei R (2013) Free vibration analysis of variable thickness thin plates by two-dimensional differential transform method. Acta Mechanica 16: 1129-1156.

[16] Keimanesh M, Rashidi MM, Chamkha AJ, Jafari R (2011) Study of a third grade non-newtonian fluid flow between two parallel plates using the multi-step differential transform method. Comput Math with Appl 62: 2871-2891.

[17] Ni Q, Zhang ZL, Wang L (2011) Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid. Appl Math Comput 217: 7028-7038.

[18] Gokdogan A, Merdan M, Yildirim A (2012) Adaptive multi-step differential transformation method to solving nonlinear differential equations. Math Comput Model 55: 761-769.

[19] Hatami M, Sheikholeslami M, Domairry G (2014) High accuracy analysis for motion of a spherical particle in plane couette fluid flow by multi-step differential transformation method. Powder Technol 260: 59-67.

[20] Ebrahimi Mamaghani A, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. Nonlinear Dynam 86(3).

[21] Ebrahimi Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R Zamani R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes J Fluid Struct 87:150-173.

[22] Rezaiee-Pajand M, Aftabi A, Hozhabrossadati SM (2017) Application of differential transform method to free vibration of gabled frames with rotational springs. Int J Struct Stab Dy 17(1): 1750012.

[23] Rezaiee-Pajand M, Aftabi A, Hozhabrossadati SM (2018) Free vibration of a generalized plane frame. Int J Eng 31(4): 538-547.

[24] Rezaiee-Pajand M, Kazemiyan MS, Aftabi A (2018) Solving Coupled Beam-Fluid Interaction by DTM. Ocean Eng 167: 380-396.

[25] Sandberg G, Ohayon R (2008) Computational aspects of structural acoustics and vibration. CISM 505: 1-281.