



DOR:

بکارگیری الگوریتم‌های JST و CUSP در بهینه‌سازی آیرودینامیکی روش الحاقی گسسته در جریان تمام-سرعت لزج روی شبکه بی‌سازمان

مصطفی گوهرشادی^{۱*} و مسعود میرزایی^۲

^۱ دانشجوی دکتری هوافضا، تهران، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده هوافضا

^۲ استاد دکتری هوافضا، تهران، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، دانشکده هوافضا

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳

چکیده

در این مقاله در ابتدا یک حلگر تمام - سرعت به روش پیش‌شرط‌گذاری روی الگوریتم‌های JST و CUSP در جریان لزج توسعه داده شده و با الگوریتم بالادست "رو" مقایسه شده است. در این مقایسه‌ها، نتایج حالت پیش‌شرطی و حالت عادی بدون پیش‌شرطی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که در سرعت‌های کم، کاهش باقیمانده و همگرایی ضرایب آیرودینامیکی در حالت بدون پیش‌شرطی به سختی حاصل می‌شود؛ در حالی که حل معادلات با پیش‌شرطی این مشکل را مرتفع کرده است. در گامی دیگر، کلیه این روش‌ها و الگوریتم‌ها با نتایج تجربی مقایسه و صحت‌سنجی شده‌اند. در اینجا نتایج نشان می‌دهد که دو الگوریتم بالادست "رو" و الگوریتم CUSP تطابق خوبی با نتایج تجربی دارند و الگوریتم CUSP سریعتر است. در گام بعدی، بهینه‌سازی آیرودینامیکی به روش حل معادلات الحاقی گسسته روی این الگوریتم‌ها پیاده‌سازی و نتایج مجدداً مقایسه شده‌اند. در این فاز، گرادیان تابع هدف روش الحاقی گسسته با روش اختلاف محدود مقایسه و اعتبارسنجی شده است. این مقایسه برای هر سه الگوریتم انجام شده است. تطابق قابل قبولی در نتایج بین روش الحاقی گسسته با روش اختلاف محدود مشاهده می‌شود. در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان اذعان داشت که الگوریتم CUSP تا حدودی از دو الگوریتم دیگر سریع‌تر بوده و گزینه مناسبی برای بهینه‌سازی است.

کلمات کلیدی: تراکم‌پذیر؛ الحاقی؛ لزج؛ فلپ؛ بی‌سازمان؛ پیش‌شرطی.

Using JST and CUSP Schemes in Aerodynamic Optimization Based on Discrete Adjoint Method in a Viscous All-Speed Solver Developed on Unstructured Grid

M. Goharshadi^{1,*}, M. Mirzaei²

¹ Ph.D. Student, Aerospace Eng., K.N. Toosi Univ. of Technology, Tehran, Iran.

² Prof., Aerospace Eng., K.N. Toosi Univ. of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, using a preconditioning approach, a viscous all-speed flow solver has been developed based on JST and CUSP schemes and compared with Roe upwind scheme in unstructured database. The comparison between the preconditioning and non-preconditioning has been done. The results show that the non-preconditioning compressible solvers hardly converged in low-speed regions while the preconditioned forms converged more rapidly. The results of all schemes were compared with experimental data which shows that all schemes have good agreement with experimental data, although, Roe upwind and CUSP schemes have more agreement to the data. Also, the CUSP scheme is faster than the other schemes. In the next step, aerodynamic optimization based on discrete adjoint method has been developed over the schemes. The verification of the methods done by comparing the results with finite difference method in both preconditioning and non-preconditioning approaches. The agreement of results is good. In general, it can be concluded that the CUSP algorithm is somewhat faster than the other two algorithms and is a good option for optimization.

Keywords: Compressible; Discrete Adjoint; Preconditioning; Unstructured Grid; Flap.

۱- مقدمه

در روش‌های حل عددی معادلات ناویر-استوکس، یک رویکرد کلی برای ساده‌سازی حل، تقرب به این معادلات از دیدگاه تراکم‌پذیری و تراکم‌ناپذیری جریان سیال است. مثال ساده این رویکرد، در بررسی آیرودینامیکی توربین‌های بادی کوچک (جریان تراکم‌ناپذیر) و در کرویز پرسرعت وسایل پرنده (جریان تراکم‌پذیر) مشاهده می‌شود. با این وجود در برخی مسایل، ترکیبی از جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر وجود دارد. به عنوان مثال، در ایرفویل‌های چند المانی، گرادیان فشاری بالا، نواحی تراکم‌پذیر قابل توجهی را بوجود می‌آورد؛ همچنین در توربین‌های بادی بزرگ و تیغه‌های بالگرد، جریان‌ات نوک تیغه در محدوده تراکم‌پذیرند. برای حل اینگونه مسایل، چنانچه حلگر تراکم‌ناپذیر باشد، با استفاده از تراکم‌پذیری مصنوعی، حل نواحی تراکم‌پذیر اصلاح می‌شود [۱ و ۲]. راه دیگر که در این مقاله استفاده شده، استفاده از حلگرهای تراکم‌پذیر است که با ضرب یک ماتریس پیش‌شرط در معادلات حاکم، سختی موجود در نواحی کم‌سرعت را کاهش می‌دهند و با تعریف جدیدی برای مقادیر ویژه، همگرایی را تسهیل می‌کند [۳ و ۴].

در حلگرهای تراکم‌پذیر عبارت لزجت مصنوعی، نوسانات موجی از جمله نوسانات ناشی از موج ضربه‌ای را میرا می‌کند. روش‌های متعددی برای محاسبه این عبارت وجود دارد؛ عمومی‌ترین این روش‌ها بر پایه الگوریتم بالادست "رو" است که از دقت خوبی نیز برخوردار است [۵]. مقدار لزجت مصنوعی حاصل ضرب ماتریس‌های بردارها و مقادیر ویژه به صورت $M|\Lambda_r|M^{-1}\Delta w_p$ است که جزییات آن در مقاله آمده است. فرینک این عملیات ماتریسی پرهزینه را با ساده‌سازی و ارایه آن‌ها به صورت مؤلفه‌های شار، $|\Delta F_i|$ ، کاهش داد که اندیس‌ها مرتبط با هر مقدار ویژه می‌باشند [۶]. ولکف و کارپنکو همین ساده‌سازی را با پیش‌شرطی در جهت شار یک‌بعدی ارایه دادند [۷]. در تحقیق قبلی، معادلات با پیش‌شرطی روش بالادست "رو" را در حالت شار دوبعدی توسعه داده و بصورت مؤلفه‌های شار ارایه کردند [۸]. یکی از روش‌های دیگر مدل لزجت مصنوعی، الگوریتم CUSP است که توسط جیمسون ارایه شده است. این الگوریتم به لحاظ هزینه محاسباتی، کم هزینه‌تر از الگوریتم بالادست "رو" است و در شبکه باسازمان برای جریان‌های

تراکم‌پذیر معادلات اوپلر و سپس معادلات ناویر-استوکس ارایه شد [۹ و ۱۰] و سپس به جریان‌های تمام-سرعت ارتقا یافت [۱۱]. این الگوریتم در ادامه برای جریان‌ات تمام-سرعت دایم و غیر دایم غیر لزج شبکه بی‌سازمان توسعه داده شد [۱۲]. در این تحقیق، الگوریتم CUSP با پیش‌شرطی در جریان لزج روی شبکه هیبریدی بی‌سازمان توسعه داده شده است؛ همچنین الگوریتم JST نیز الگوریتم دیگری است که هزینه محاسباتی کمتری نسبت به الگوریتم بالادست "رو" دارد. این الگوریتم ابتدا برای جریان‌ات تراکم‌پذیر در شبکه با سازمان [۱۳] و سپس در شبکه بی‌سازمان توسعه داده شده [۱۴] و در نهایت در شبکه بی‌سازمان به حالت تمام-سرعت ارتقا یافت [۱۵].

در کنار حل معادلات ناویر-استوکس در دهه‌های اخیر، بهینه‌سازی آیرودینامیکی نیز یکی از مسایل اساسی بوده است. یکی از روش‌های مهم در بهینه‌سازی آیرودینامیکی، روش حل معادلات الحاقی است [۲۰-۱۶] که در آن هزینه محاسباتی روش، مستقل از تعداد متغیرهای طراحی است، بر خلاف سایر روش‌های گرادیان‌ی مانند روش اختلاف محدود که در آن گرادیان تابع هدف مستقیماً به ازای تغییر هر متغیر طراحی محاسبه می‌شود و به عبارت دیگر هزینه محاسباتی آن تابع مستقیم تعداد متغیر طراحی است. در روش الحاقی، تئوری کنترل به معادلات حاکم بر جریان اعمال می‌شود و خود شامل، دو رویکرد پیوسته و گسسته است. در رویکرد گسسته، تئوری کنترل مستقیماً به شکل گسسته معادلات حاکم اعمال می‌شود. این رویکرد اگرچه پیچیدگی بیشتری در اجرا به خصوص در معادلات با گسسته‌سازی مرتبه دوم و بالاتر دارد و حساسیت به شبکه در آن بایستی محاسبه شود، لیکن گرادیان‌های تابع هدف را با دقت بالاتری بدست می‌آورد [۱۸]. اعمال روش الحاقی در روش گسسته به حل مستقیم یک دستگاه معادله جبری توخالی بزرگ^۱ منجر می‌شود. حل این دستگاه در جریان لزج به خاطر غیر کاملاً قطری بودن، می‌تواند ناپایدار شود. یک راهکار، تبدیل معادلات به شکل حل تکراری است [۱۹]. این روش حل تکراری در حالت بدون پیش‌شرط به خوبی کار می‌کند، اما در حالت با پیش‌شرطی باز هم می‌تواند ناپایدار شود. آسوتی

^۱ Sparse Matrix

جزئیات تعاریف بکار رفته در معادلات حاکم، گسسته‌سازی و مدل‌سازی آشفته‌گی، در مرجع [۸] آمده است.

۳- الگوریتم‌های گسسته‌سازی عبارات غیرلزج

در معادله (۲)، شارهای غیرلزج در لبه m ام حجم کنترل با استفاده از بیان "راست" و "چپ" به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شوند [۵].

$$\overline{f^{inv}}_m \cdot \overline{n}_m = \frac{1}{2} [F(W_{Rm}) + F(W_{Lm}) + D_m] \quad (3)$$

که در این رابطه:

$$F = \overline{f^{inv}} \cdot \overline{n} = \begin{cases} \rho V_c \\ \rho u V_c + p n_x \\ \rho v V_c + p n_y \\ \rho H V_c \end{cases} \quad (4)$$

که V_c سرعت عمود بر وجه^۴ است.

عبارات راست و چپ بستگی به مرتبه تعیین متغیرها در لبه حجم محدود دارد. در این تحقیق از مرتبه دوم استفاده شده است. در این حالت، نوسانات حل می‌تواند در نواحی گرادیان‌های بزرگ ناشی از موج ضربه‌ای و یا ناپایداری‌های خود حل عددی بوجود آید. استفاده از محدودکننده‌ها در این مواقع ضروری است. در این تحقیق از محدودکننده و نکات‌اکریشن استفاده شده است که همگرایی بهتری بخصوص در روش‌های سلول-پایه بی‌سازمان دارد [۲۳]؛ همچنین برای بهبود حل در نقاط سکون، بهبوددهنده کیتامورا و شیما استفاده گردید [۲۴].

در رابطه (۳)، برای D_m ، عبارت لزجت مصنوعی، الگوریتم‌های مختلفی برای محاسبه ارایه شده‌اند که در اینجا الگوریتم‌های بالادست "رو"، CUSP و JST بررسی می‌شوند.

۳-۱- الگوریتم بالادست "رو"

در این الگوریتم، عبارت لزجت مصنوعی به صورت رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$D_m = -|A_{Roe}|_m (w_{Rm} - w_{Lm}) \quad (5)$$

عبارت $|A_{Roe}|_m$ ، ماتریس "رو" یا ماتریس ژاکوبیان قدرمطلق^۱ برابر است با [۴]:

و همکارانش^۱ در زمان محاسبه ژاکوبین باقیمانده‌ها از حالت بدون پیش‌شرطی استفاده کردند و بر این مشکل فایز آمدند [۲۰].

در بهینه‌سازی‌های جریان تمام-سرعت بر پایه معادلات الحاقی از الگوریتم‌های لزجت مصنوعی متفاوتی استفاده می‌شود. آسوتی و همکارانش از الگوریتم بالادست "رو" استفاده کردند [۲۰]. ریتلپ و همکارانش^۲، پروفایل توربین بادی را با استفاده از الگوریتم JST بهینه کردند [۲۱]. در این تحقیق از سه الگوریتم بالادست "رو"، الگوریتم JST و الگوریتم CUSP استفاده می‌شود.

با این مقدمه، هدف اول در این تحقیق، توسعه یک کد بی‌سازمان تمام-سرعت در حالت با پیش‌شرطی و بدون آن بر پایه الگوریتم‌های بالادست "رو"، JST و CUSP در حالت دوبعدی و مقایسه بین آنها است. هدف بعدی، توسعه یک حلگر الحاقی گسسته و لزج روی این الگوریتم‌ها جهت بهینه‌سازی آیرودینامیکی است که مجدداً نتایج الگوریتم‌ها با یکدیگر مقایسه می‌گردند.

۲- معادلات حاکم، گسسته‌سازی و مدل آشفته‌گی

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر در شکل بقایی به صورت رابطه (۱) هستند:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_x^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial f_y^{inv}}{\partial y} = \frac{\partial f_x^{vis}}{\partial x} + \frac{\partial f_y^{vis}}{\partial y} \quad (1)$$

شکل گسسته حجم محدود این معادلات به شکل برداری به صورت رابطه (۲) قابل ارایه است:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\Omega_c} \left[\sum_{m=1}^{N_F} (\overline{f^{inv}} - \overline{f^{vis}})_m \cdot \overline{n}_m \Delta S_m \right] \quad (2)$$

در این رابطه، \overline{n}_m بردار واحد عمود بر لبه m ام از سلول c و ΔS_m طول آن است؛ همچنین w متغیر بقایی جریان، $\overline{f^{inv}}$ و $\overline{f^{vis}}$ شارهای غیر لزج و لزج می‌باشند.

برای مدل‌سازی جریانات آشفته، در این تحقیق از مدل آشفته‌گی اسپالارت-آلماراس بهبودیافته^۳ استفاده شده است که در پهنه وسیعی از مسایل مهندسی کاربرد دارد [۲۲].

^۱ Asouti et al.

^۲ Ritlop et al.

^۳ Modified Spalart-Allmaras model

^۴ Contravariant Velocity

$$\alpha_m^* = \alpha_m - \beta_m M_m \quad (12)$$

نماد “-” نشان دهنده این است که متغیرها از نوع متوسط‌گیری شده “رو” هستند. همچنین،

$$M_m = \frac{\bar{V}_{cm}}{\bar{a}_m},$$

$$\beta_m = \text{sign}(M_m) \min[1, \max(0, 2|M_m| - 1)],$$

$$\alpha_m = \begin{cases} |M_m|, & |M_m| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{M_m^2}{\varepsilon} \right), & |M_m| < \varepsilon \end{cases} \quad (13)$$

۳-۳- الگوریتم JST

در این الگوریتم، عبارت لزجت مصنوعی در شبکه بی‌سازمان به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود [۱۴]:

$$D_m = \lambda_m \left[\bar{\varepsilon}_m^{(2)} (w_j - w_i) - \bar{\varepsilon}_m^{(4)} [L_j(w) - L_i(w)] \right] \quad (14)$$

در این رابطه، λ_m ، قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبیان (ترجیحا ماتریس “رو”) هستند. $\bar{\varepsilon}_m^{(4)}$ و $\bar{\varepsilon}_m^{(2)}$ ضرایب مرتبه اول و سوم شار بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\varepsilon}_m^{(2)} = \varepsilon_m^{(2)} S_m^{(2)} \bar{\phi}_m$$

$$\bar{\varepsilon}_m^{(4)} = \varepsilon_m^{(4)} S_m^{(4)} \bar{\phi}_m \quad (15)$$

که:

$$\varepsilon_m^{(2)} = k^{(2)} \max(\psi_i, \psi_j)$$

$$\varepsilon_m^{(4)} = \max(0, k^{(4)} - \varepsilon_m^{(2)}) \quad (16)$$

و در این رابطه $k^{(2)}$ و $k^{(4)}$ ثوابت هستند که برای جریان لزج بصورت نمونه می‌توان آنها را به ترتیب $1/2$ و $1/64$ در نظر گرفت.

در رابطه (۱۵)، $\bar{\phi}_m$ ، مقدار اتلاف یا همان لزجت مصنوعی را در شبکه‌های کشیده، در لبه‌های بزرگتر افزایش و در لبه‌های کوچکتر کاهش می‌دهد. جزئیات تعریف توابع $L(w)$ و سایر متغیرها و ثوابت توسط وایت و همکارانش ارائه شده‌اند [۱۴].

۴- روش پیش‌شرط در حلگر تمام-سرعت

حل معادلات تراکم‌پذیر بالا در اعداد ماخ حدودا بالای 0.3 به سهولت امکان‌پذیر است، اما با کاهش عدد ماخ همگرایی

$$|A_{Roe}| = T |\Lambda| T^{-1} \quad (6)$$

ماتریس $|\Lambda|$ ، یک ماتریس قطری است که عناصر آن قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس A_{Roe} هستند. T ماتریس بردارهای ویژه ماتریس A_{Roe} و T^{-1} معکوس آن است. با محاسبه این ماتریس‌ها و جایگذاری در رابطه (۶)، عبارت لزجت مصنوعی توسط فرینک بصورت زیر بدست می‌آید [۶].

$$D_m = |\Delta F_{1,2}| + |\Delta F_3| + |\Delta F_4| \quad (7)$$

که در این رابطه،

$$|\Delta F_{1,2}| = |V_c| \left\{ (\Delta \rho - \Delta p/a^2) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ q^2 \\ 2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V_c n_x \\ \Delta v - \Delta V_c n_y \\ u \Delta u + v \Delta v - V_c \Delta V_c \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

$$|\Delta F_3| = |V_c + a| \left\{ \left(\frac{\Delta p + \rho a \Delta V_c}{2a^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u + a n_x \\ v + a n_y \\ H + a V_c \end{bmatrix} \right\} \quad (9)$$

$$|\Delta F_4| = |V_c - a| \left\{ \left(\frac{\Delta p - \rho a \Delta V_c}{2a^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u - a n_x \\ v - a n_y \\ H - a V_c \end{bmatrix} \right\} \quad (10)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، این روش ارایه فرینک که بجای ضرب ماتریس‌ها ارایه شده، حجم محاسبات را به شدت کاهش می‌دهد.

۳-۲- الگوریتم CUSP

در این الگوریتم، D_m به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_m = \frac{\alpha_m^*}{2} \bar{a}_m (w_{Rm} - w_{Lm}) + \frac{\beta_m}{2} (F(w_{Rm}) - F(w_{Lm})) \quad (11)$$

که در این رابطه:

¹ Diagonalised Jacobian Matrix

همانطور که گفته شد، هنگامی که $M \rightarrow 0$ ، همگرایی باقیمانده‌های شکل تراکم‌پذیر حلگر لزج به شدت کاهش می‌یابد و دقت نتایج هم تا حدودی کاهش می‌یابد. برای اصلاح این مشکل، ماتریس P با یک ماتریس مناسب Γ جایگزین می‌شود؛ به طوری که سیستم پیش شرط در اعداد ماخ بالا همانند سیستم اولیه باشد:

$$\Omega_c \Gamma \frac{dw_p}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_{pR}) + F_m(w_{pL}) + D_m \} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (20)$$

مسئله چون این تغییر در عبارت زمانی معادلات، ایجاد شده و پس از همگرایی عملاً کل عبارت صفر خواهد شد، تأثیری روی نتایج نخواهد داشت و فقط همگرایی را تسریع خواهد کرد که از ابتدا مقصود بوده است.

ویس و اسمیت^۲ یک ماتریس پیش شرط پیشنهاد کرده‌اند که برای حالت عمومی یک سیال مناسب است. شکل گاز کامل این ماتریس به صورت زیر است [۲۵]:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & -\rho/T \\ \theta u & \rho & 0 & -\rho/T u \\ \theta v & 0 & \rho & -\rho/T v \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & -\rho/T \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در این رابطه،

$$\theta = \frac{1 + (\gamma - 1)M_r^2}{M_r^2 a^2} \quad (22)$$

$$M_r^2 = \max[\min(M^2, 1), K M_\infty^2], K \approx 1$$

همان گونه که در معادله (۲۲) مشاهده می‌شود، هنگامی که $M \rightarrow 1$ ، θ مساوی γ/a^2 می‌شود و ماتریس پیش شرط Γ مساوی ماتریس P می‌شود. این یعنی همگرایی در ماخ یک در دو روش با پیش شرطی و بدون آن یکی است و تسریع یا تأخیری در آن ایجاد نمی‌شود، اما در اعداد ماخ کم که همگرایی بدون پیش شرطی ضعیف است، پیش شرط‌گذاری بایستی بتواند بهبودی در همگرایی ایجاد کند.

۴-۱- معادلات پیش شرط در الگوریتم بالادست "رو"
در معادله (۲۰)، عبارت لزجت مصنوعی، D_m را در حالت پیش شرط به صورت رابطه (۲۳) می‌توان نوشت:

طولانی و حل نوسانی می‌شود (بخصوص در اعداد ماخ زیر ۰/۱). در این حالت سختی حل دستگاه معادلات که در حالت کوپل می‌باشند، افزایش می‌یابد که این بخاطر کوچک شدن بعضی از مقادیر ویژه در سرعت‌های کم و همچنین غیرمنطقی شدن سرعت صوت است. همانطور که می‌دانیم، سرعت صوت جذر تغییر فشار به تغییر چگالی است. در سرعت‌های خیلی کم، چگالی تقریباً ثابت است؛ بنابراین سرعت صوت تمایل به بی‌نهایت شدن دارد. یک راه برطرف کردن این مشکل، ضرب معادلات حاکم در یک ماتریس (که اصطلاحاً به آن ماتریس پیش شرط می‌گویند) به گونه‌ای است که مقادیر ویژه نهایی منطقی شوند و سختی حل دستگاه کاهش یابد. در ادامه این فرآیند تشریح می‌شود: معادلات ناویر-استوکس در حالت تراکم‌پذیر در شکل بقایای حجم محدود گسسته را با استفاده از معادلات (۲) و (۳) به صورت زیر مجدداً می‌توان نوشت:

$$\Omega_c \frac{dw}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} [F_m(w_R) + F_m(w_L) + D_m] \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (17)$$

در شکل متغیرهای اصلی^۱، می‌توان نوشت:

$$\Omega_c P \frac{dw_p}{dt} + \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_{pR}) + F_m(w_{pL}) + D_m \} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \vec{f}^{vis}_m \cdot \vec{n}_m \Delta S_m \right] = 0 \quad (18)$$

با انتخاب $w_p = [p, u, v, T]$ ، ماتریس P به صورت زیر خواهد شد:

$$P = \frac{\partial w}{\partial w_p} = \begin{bmatrix} \gamma/a^2 & 0 & 0 & -\rho/T \\ \gamma/a^2 u & \rho & 0 & -\rho/T u \\ \gamma/a^2 v & 0 & \rho & -\rho/T v \\ \gamma/a^2 H - 1 & \rho u & \rho v & -\rho/T \frac{q^2}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

² Weiss and Smith

¹ Primitive Variables

که در این رابطه:

$$|\Delta F_{1,2}| = |\lambda_1| \left\{ \left(\frac{\gamma-1}{a^2} \Delta p - \frac{\rho}{T} \Delta T \right) \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ q^2 \\ 2 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ n_y \Delta V_n \\ -n_x \Delta V_n \\ V_n \Delta V_n \end{bmatrix} \right\} \quad (31)$$

$$|\Delta F_{3,4}| = \left\{ \frac{\Delta p}{a^2 \phi} [d_1 (V_c' - V_c) + d_2] + d_1 \rho \Delta V_c \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ V_c \end{bmatrix} + \{ \Delta p d_1 + \rho \Delta V_c [d_1 (V_c - V_c') + d_2] \} \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ V_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

و در این روابط:

$$d_1 = \frac{|\lambda_3| - |\lambda_4|}{2a'}, \quad d_2 = \frac{|\lambda_3| + |\lambda_4|}{2}, \quad V_n = u n_y + v n_x \quad (33)$$

همان‌گونه که مشهود است، روابط (۳۰) تا (۳۲) حجم محاسبات عملیات ماتریسی $\Gamma M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \Delta w_p$ را که در هر لبه سلول شبکه بایستی انجام شود، به شدت کاهش می‌دهد.

۴-۲- معادلات پیش‌شرط در الگوریتم CUSP

لزجت مصنوعی در الگوریتم CUSP توسط نویسندگان در حالت پیش‌شرطی، بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$D_m = (\Gamma P^{-1})_m \left[\frac{\alpha_m^*}{2} \bar{a}_m (w_{Rm} - w_{Lm}) + \frac{\beta_m}{2} (F(w_{Rm}) - F(w_{Lm})) \right] \quad (34)$$

که در این رابطه:

$$\alpha_m^* = \alpha_m - \beta_m \dot{M}_m \quad (35)$$

$$\dot{M}_m = \frac{\bar{V}_{cm}}{\bar{a}_m} \quad (36)$$

$$\beta_m = \text{sign}(\dot{M}_m) \min[1, \max(0, 2|\dot{M}_m| - 1)] \quad (37)$$

$$\alpha_m = \begin{cases} |\dot{M}_m|, & |\dot{M}_m| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\dot{M}_m^2}{\varepsilon} \right), & |\dot{M}_m| < \varepsilon \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_{Roe} \Delta w &= \Gamma \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial w} \Delta w \\ &= \Gamma \left(\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial w_p} \right) \Delta w_p \\ &= \Gamma (\Gamma^{-1} A_p) \Delta w_p = \Gamma A_\Gamma \Delta w_p \quad (23) \end{aligned}$$

که در این رابطه $A_p = \frac{\partial F}{\partial w_p}$ حال با تبدیل مجدد متغیرهای اصلی به شکل بقایی در نهایت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Omega_c \frac{dw}{dt} + P \Gamma^{-1} \left[\sum_{m=1}^{N_F} \frac{1}{2} \{ F_m(w_R) + F_m(w_L) \} \right. \\ \left. - \Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p \right] \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \overrightarrow{f_m^{vis}} \cdot \overrightarrow{n_m} \Delta S_m = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

در این معادله، $|A_\Gamma|$ ماتریس ژاکوبیان قدر مطلق مشابه رابطه (۶)، در شکل پیش‌شرط با رابطه (۲۵) تعریف می‌شود:

$$|A_\Gamma| = M_\Gamma |A_\Gamma| M_\Gamma^{-1} \quad (25)$$

ماتریس A_Γ یک ماتریس قطری است که عناصر آن λ_i ، قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس $\Gamma^{-1} A_p$ هستند؛ همچنین M_Γ ماتریس بردارهای ویژه و M_Γ^{-1} معکوس آن است. با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه به دست می‌آیند:

$$\lambda_{1,2} = V_c, \quad \lambda_{3,4} = V_c' \pm a' \quad (26)$$

علامت "±"، نشان‌دهنده مقادیر تغییر یافته سرعت عمود بر وجه و سرعت صوت می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$V_c' = \frac{\varphi + 1}{2} V_c \quad (27)$$

$$a' = \sqrt{\left(\frac{\varphi - 1}{2} \right)^2 V_c^2 + \varphi a^2} \quad (28)$$

$$\text{where } \varphi = \frac{1}{\theta a^2 - (\gamma - 1)} \quad (29)$$

همچنین، ماتریس بردارهای ویژه و معکوس آن از رابطه $(A_\Gamma - \lambda_i I) \mathbf{r}_i = 0$ حاصل می‌شوند. جزئیات آن در مرجع [۸] آمده است. در نهایت:

$$\Gamma |A_\Gamma| \Delta w_p = |\Delta F_{1,2}| + |\Delta F_{3,4}| \quad (30)$$

روش بهینه‌سازی بر پایه معادلات الحاقی به این شکل اجرایی می‌شود: اگر در بین دو مرحله بهینه‌سازی، پس از حل جریان، مقدار R به سمت صفر میل می‌کند، تغییر در تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی $\frac{\delta I}{\delta b_i}$ را می‌توان با عبارت ضرب برداری یک تابع برداری مجهول به اسم تابع الحاقی ψ در تغییر در تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی $\frac{\delta R}{\delta b_i}$ که عبارتی با مقدار صفر است، جمع کرد:

$$\frac{\delta I}{\delta b_i} = \frac{\delta I}{\delta b_i} + \psi^T \frac{\delta R}{\delta b_i} \quad (42)$$

این معادله را می‌توان بر حسب تغییر متغیرهای جریان و تغییر شبکه محاسباتی بسط داد:

$$\frac{\delta I}{\delta b_i} = \left(\frac{\partial I}{\partial w} \frac{\delta w}{\delta b_i} + \frac{\partial I}{\partial X} \frac{\delta X}{\delta b_i} \right) + \psi^T \left(\frac{\partial R}{\partial w} \frac{\delta w}{\delta b_i} + \frac{\partial R}{\partial X} \frac{\delta X}{\delta b_i} \right) \quad (43)$$

با جداسازی عبارات متغیرهای جریان و متغیرهای طراحی:

$$\frac{\delta I}{\delta b_i} = \left(\frac{\partial I}{\partial w} + \psi^T \frac{\partial R}{\partial w} \right) \frac{\delta w}{\delta b_i} + \left(\frac{\partial I}{\partial X} + \psi^T \frac{\partial R}{\partial X} \right) \frac{\delta X}{\delta b_i} \quad (44)$$

حال اگر عبارت اول سمت راست معادله بالا به طریقی صفر شود، تابع هدف تنها تابع تغییر شبکه محاسباتی و به عبارتی تنها تابع متغیر طراحی خواهد بود. در این حالت این گرادیان $\frac{\delta I}{\delta b_i}$ تابعی از متغیرهای جریان نبوده و قابل محاسبه است؛ بنابراین عبارت اول را مساوی صفر قرار می‌دهیم که به معادله الحاقی منجر می‌شود:

$$\frac{\partial I}{\partial w} + \psi^T \frac{\partial R}{\partial w} = 0 \quad (45)$$

با بدست آمدن بردار ψ در میدان جریان، باقیمانده رابطه (۴۴)، گرادیان تابع هدف را بدست می‌آورد:

$$\frac{\delta I}{\delta b_i} = \left(\frac{\partial I}{\partial X} + \psi^T \frac{\partial R}{\partial X} \right) \frac{\delta X}{\delta b_i} \quad (46)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، معادله (۴۵)، یک دستگاه معادله توخالی بزرگ^۲ است. حل مستقیم این دستگاه معادله از آنجا که در شبکه بی‌سازمان به شدت غیر قطری است، می‌تواند ناپایدار شود. یک راه برای غلبه بر این مشکل، تبدیل این معادله به شکل تکراری شبه زمانی است [۲۷]:

مقادیر با علامت " "، همان عبارات تغییر یافته در حالت پیش‌شرطی هستند که در معادلات (۲۷) تا (۲۹) مشاهده می‌شوند. نتایج در بخش ۷-۱ نشان خواهند داد که این پیشنهاد نویسنده (یعنی تغییر تعریف متغیرها به فضای پیش‌شرطی که از نتیجه روش بالادست "رو" الهام گرفته شده است)، برای الگوریتم CUSP به خوبی عمل نموده و در مقایسه با نتایج تجربی معتبر است.

۴-۳- معادلات پیش‌شرط در الگوریتم JST

عبارت لزجت مصنوعی در حالت پیش‌شرط در الگوریتم JST در شبکه بی‌سازمان با ضرب ماتریس ΓP^{-1} به دست می‌آید:

$$D_m = \lambda_m (\Gamma P^{-1})_m \left[\varepsilon_m^{(2)} (w_j - w_i) - \varepsilon_m^{(4)} [L_j(w) - L_i(w)] \right] \quad (39)$$

پس از محاسبه عبارات لزجت مصنوعی، همانند معادله (۲۴)، کل شارها در ماتریس $P \Gamma^{-1}$ ضرب می‌شوند.

۵- معادلات الحاقی گسسته

۵-۱- معادلات الحاقی در شکل بدون پیش‌شرطی

در موضوع بهینه‌سازی گرادیانی، هدف به حداقل رساندن تابع هدفی همانند I است که تحت قید معادلات حاکم بر جریان در شکل باقیمانده R در میدان جریان است:

$$R = \frac{\partial f_x^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial f_y^{inv}}{\partial y} - \frac{\partial f_x^{vis}}{\partial x} - \frac{\partial f_y^{vis}}{\partial y} \quad (40)$$

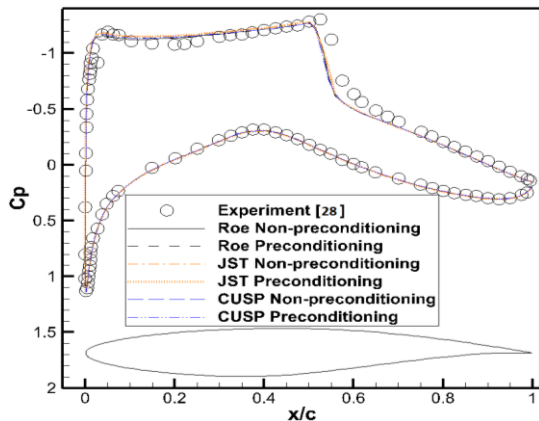
به طوری که:

$$R = R(w, X) \quad , \quad I = I(w, X) \quad (41)$$

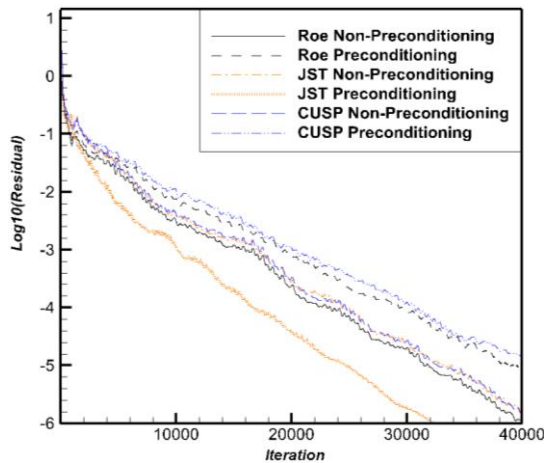
در این روابط، w متغیر جریان و X بیانی برای شبکه محاسباتی است. حال تغییری در هندسه بدنه (که متغیر طراحی معرفی می‌شود)، w و X را تغییر می‌دهد و به نوبه خود سبب تغییر تابع هدف می‌شود. متغیرهای طراحی که در اینجا با b_i نمایش داده می‌شوند، در حالت دو بعدی می‌توانند نقاط سطح ایرفویل، نقاط بی-اسپیلان تعریف کننده منحنی ایرفویل، توابع سینوسی هیگز-هنه^۱ [۲۶]، یا هر تعریف و تابعی دیگر برای هندسه باشند. در این تحقیق از توابع هیگز-هنه استفاده شده است.

² Very Large Sparse Equation

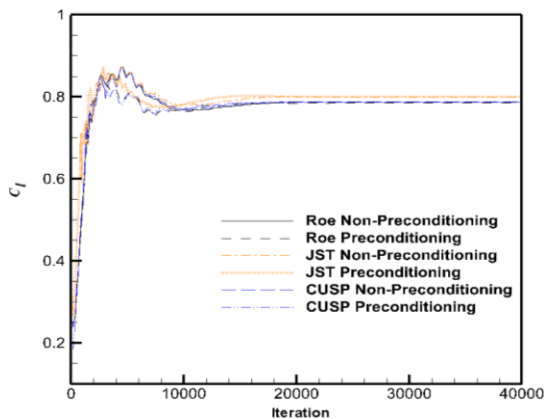
¹ Hicks-Henne Functions



شکل ۱- مقایسه بین ضریب فشار در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل RAE2822 با داده‌های تجربی در محک ۱



شکل ۲- مقایسه بین همگرایی باقیمانده‌ها در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل RAE2822



شکل ۳- مقایسه بین همگرایی ضریب برآ در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل RAE2822

$$\left[\frac{\Omega_c}{dt_c} + \left(\frac{\partial R}{\partial w} \right)^T \right]^n (\psi^{n+1} - \psi^n) = - \left[\left(\frac{\partial R}{\partial w} \right)^T \psi^n + \left(\frac{\partial I}{\partial w} \right)^T \right] \quad (47)$$

که در این رابطه، dt_c ، گام زمانی محلی (local time step) در سلول c است.

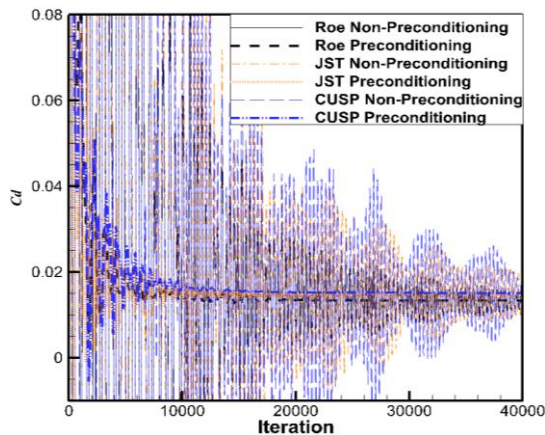
۵-۲- معادلات الحاقی در حالت پیش‌شرطی

حل تکراری ارایه شده در معادله (۴۷)، در حلگرهای بدون پیش‌شرطی بخوبی کار می‌کند، اما با پیش‌شرطی ناپایدار می‌شود. آسوتی و همکارانش [۲۰]، برای محاسبه ژاکوبین باقیمانده در معادلات الحاقی گسسته از حالت بدون پیش‌شرطی استفاده کردند که به نتایج پایدار و دقیقی منجر شد که در اینجا نیز از همین روش استفاده شده است.

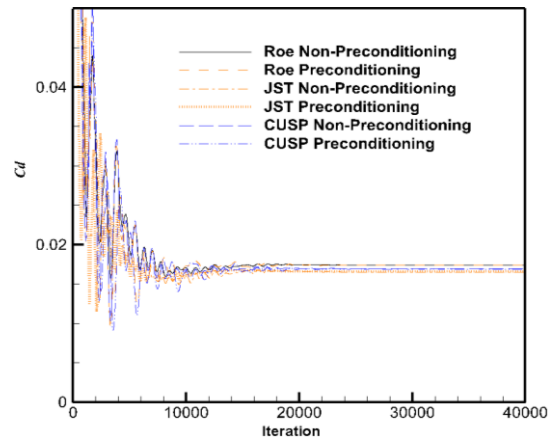
۷- نتایج عددی

۷-۱- اعتبارسنجی حلگر جریان و مقایسه همگرایی‌ها

به منظور اعتبارسنجی الگوریتم‌ها در دو حالت با پیش‌شرطی و حالت عادی، محک‌های مختلفی استفاده شدند؛ محک اول، ایرفویل RAE2822 است که نتایج تجربی آن در عدد ماخ ۰/۷۲۹، زاویه حمله ۲/۸ درجه و عدد رینولدز ۶/۵ میلیون ارایه شده است [۲۸]. ضرایب فشار در تمامی حالات با نتایج تجربی در شکل ۱ مقایسه شده‌اند. نتایج عددی الگوریتم بالادست "رو" و الگوریتم CUSP تطابق کاملاً خوبی با نتایج تجربی دارند، ولی اختلاف کمی در الگوریتم JST با نتایج تجربی مشاهده می‌شود. نمودار همگرایی باقیمانده و ضرایب آیرودینامیکی در اشکال ۲ تا ۴ مقایسه شده‌اند که باز هم تغییرات بزرگی بین الگوریتم‌ها و دو حالت با پیش‌شرطی و حالت عادی در نتایج مشاهده نمی‌شود. نتایج JST با سایر الگوریتم‌ها کمی اختلاف دارد و البته نرخ همگرایی بهتری دارد؛ محک دوم ایرفویل NACA0012 است که نتایج تجربی آن در عدد ماخ ۰/۱۵، زاویه حمله ۱۰ درجه و عدد رینولدز ۳ میلیون ارایه شده است [۲۹]. مجدداً ضرایب فشار در تمامی حالات با نتایج تجربی در شکل ۵ مقایسه شده‌اند. تطابق خوبی با نتایج تجربی در تمامی نتایج عددی مشاهده می‌شود. نمودار همگرایی باقیمانده و ضرایب آیرودینامیکی در اشکال ۶ تا ۷ مقایسه شده‌اند. نرخ همگرایی باقیمانده در هر



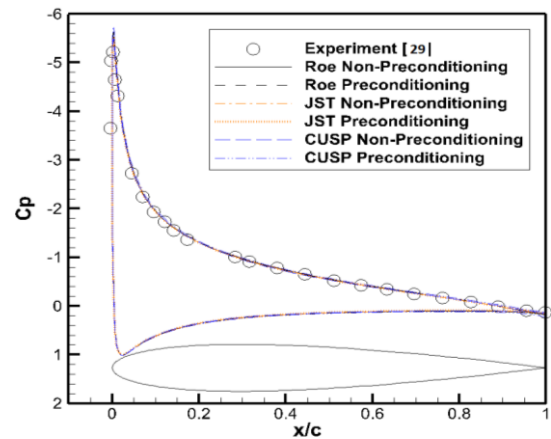
شکل ۷- همگرایی ضریب پسا در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل NACA0012 در محک ۲ در $M=0.15$



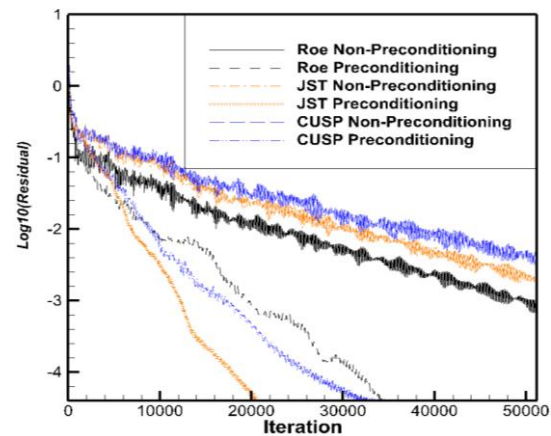
شکل ۴- مقایسه بین همگرایی ضریب پسا در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل RAE2822

سه الگوریتم با پیش شرطی بسیار بیشتر از حالت عادی است که نیاز به پیش شرط‌گذاری در سرعت‌های کم تصدیق می‌شود. در این حالت نرخ همگرایی سه الگوریتم نزدیک به هم است، اگرچه الگوریتم JST نرخ بهتری دارد. در همگرایی ضرایب آیرودینامیکی نوسان زیادی بدون پیش شرطی مشاهده می‌شود و نتایج بعد از ۴۰۰۰۰ تکرار نیز همچنان دارای نوسان هستند. همین ایرفویل در شرایط قبلی، اما این بار در عدد ماخ ۰/۰۵ مورد ارزیابی قرار گرفت که این بار نرخ همگرایی دیر هنگام در باقیمانده‌ها و نوسان در همگرایی ضرایب آیرودینامیکی بسیار شدیدتر است (اشکال ۸ و ۹). این موضوع نشان می‌دهد که هر چه عدد ماخ کمتر می‌شود، نیاز به پیش شرط‌گذاری قطعی‌تر است. نکته دیگر اینکه اگرچه در الگوریتم JST، نرخ همگرایی بهتر است، لیکن بیش از ۷۰٪ هزینه محاسباتی بیشتر دارد؛ بنابراین زمان همگرایی حتی طولانی‌تر است. این هزینه بیشتر به خاطر حجم محاسبات بالا در محاسبه ضرایب مرتبه اول و سوم شار یعنی $\bar{\epsilon}_m^{(2)}$ و $\bar{\epsilon}_m^{(4)}$ در روش بی سازمان در معادله (۱۴) است که جزئیات آن در مرجع [۱۴] آمده است. در جدول ۱، زمان حل پردازشگر برای یک رایانه ۸ هسته‌ای برای هر ۱۰۰ تکرار در هر سه الگوریتم در حل جریان روی ایرفویل RAE2822 با ۵۲۸۰۰ سلول شبکه مقایسه شده است.

در اعتبارسنجی دیگری نتایج عددی محاسبه ضریب اصطکاک با نتایج تجربی در محک اول مقایسه شده‌اند (شکل ۱۰). اختلاف محدودی بین نتایج تجربی و نتایج

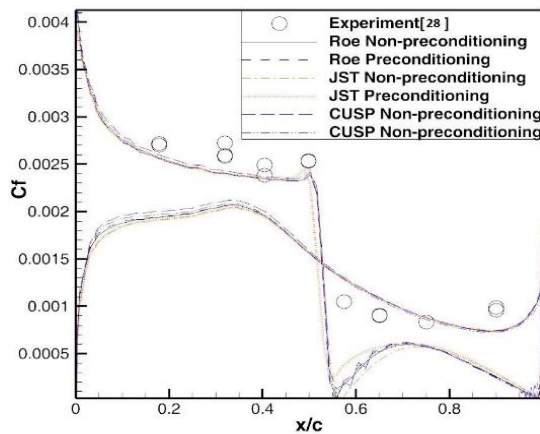


شکل ۵- مقایسه بین ضریب فشار در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل NACA0012 با داده‌های تجربی در محک ۲

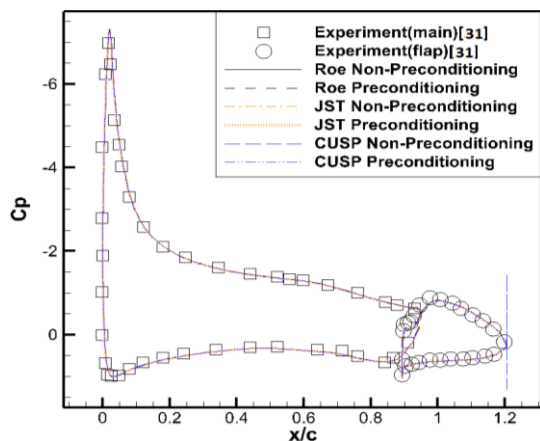


شکل ۶- همگرایی باقیمانده‌ها در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل NACA0012 در محک ۲ در $M=0.15$

در این شکل، نتایج روش‌های عددی کاملاً به هم نزدیک هستند؛ در محک سوم ایرفویل-فلپ NLR7301 در عدد ماخ 0.185 ، زاویه حمله 10° درجه و عدد رینولدز $2/51$ میلیون انتخاب شده است [۳۱]. نتایج ضریب فشار روش عددی در کنار نتایج تجربی در شکل ۱۱ نشان داده شده است. نوسان کوچکی در حالت بدون پیش‌شرطی لبه فرار فلپ مشاهده می‌شود، در حالی که با پیش‌شرط‌گذاری چنین ناپایداری در حل مشاهده نمی‌شود. کانتور فشار و شبکه بی‌سازمان حول ایرفویل-فلپ نیز برای الگوریتم بالادست "رو" در شکل ۱۲ نشان داده شده است که با توجه به نتایج مشابه الگوریتم CUSP از نمایش تکراری نتایج خودداری گردید.



شکل ۱۰- مقایسه بین ضریب اصطکاک در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل RAE2822 با داده‌های تجربی در محک ۱ عدد ماخ 0.729 ، زاویه حمله $2/8$ درجه

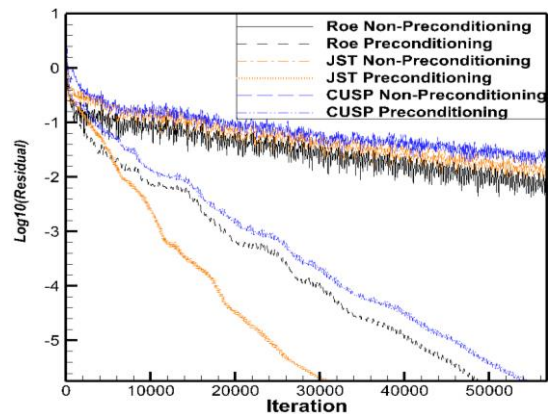


شکل ۱۱- ضریب فشار در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل-فلپ NLR7301 با داده‌های تجربی در محک ۳

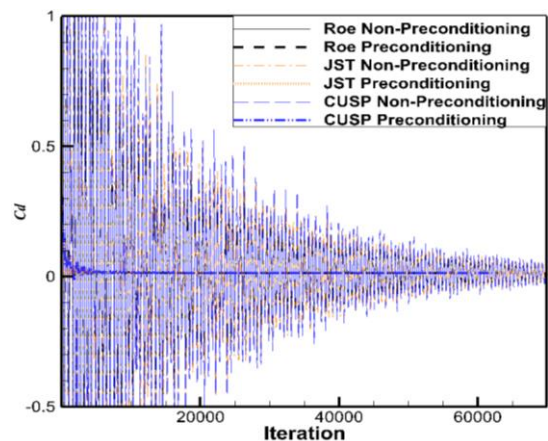
عددی مشاهده می‌شود. لازم به یادآوری است که محاسبه تجربی ضریب اصطکاک، سخت و با خطا همراه است و داده‌های کمی نیز در این زمینه منتشر شده است، ولی مقایسه رفتار کلی امکان پذیر است و با این نگرش تطابق خوبی بین روش‌های عددی و روش تجربی برقرار است [۳۰].

جدول ۱- زمان حل پردازشگر برای یک رایانه ۸ هسته‌ای برای هر ۱۰۰ تکرار در حل جریان روی ایرفویل RAE2822 با 52800 سلول شبکه بر حسب ثانیه

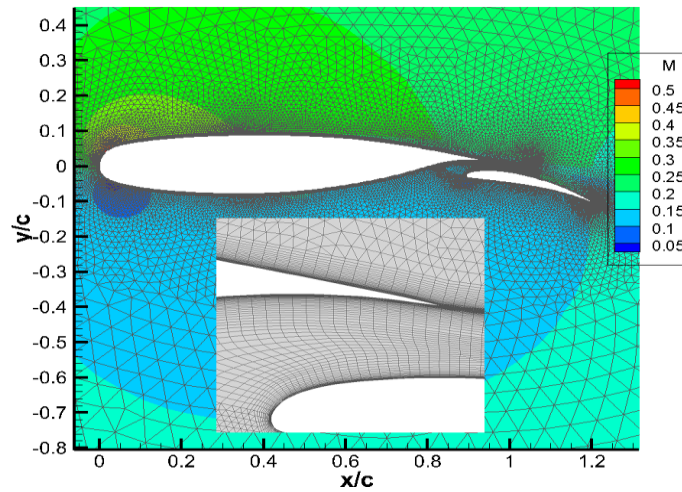
روش بالادست "رو"	روش CUSP	روش JST
۴۷	۴۵	۷۷



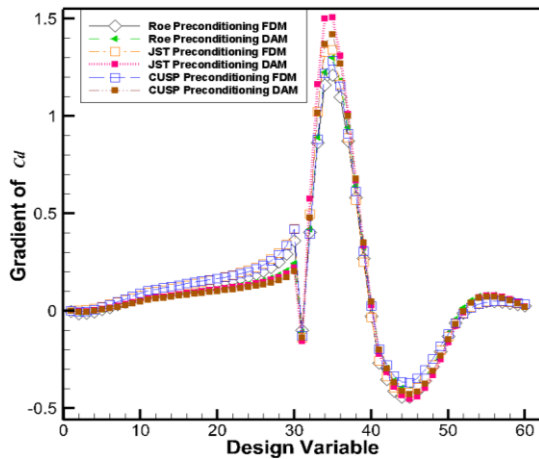
شکل ۸- همگرایی باقیمانده‌ها در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل NACA0012 در محک ۲ در $M=0.05$



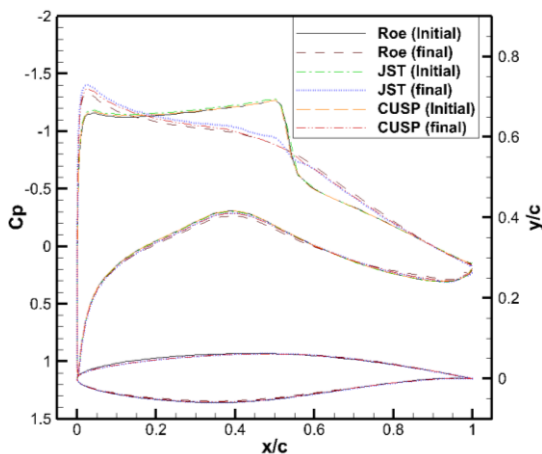
شکل ۹- همگرایی ضریب پسا در الگوریتم‌های مختلف روی ایرفویل NACA0012 در محک در $M=0.05$



شکل ۱۲- شبکه بی سازمان و کانتور عدد ماخ در ایرفویل-فلپ NLR7301 در حالت با پیش شرط



شکل ۱۳- گرادیان ضریب پسا در شرایط محک اول



شکل ۱۴- توزیع فشار قبل و بعد بهینه‌سازی در RAE2822

۷-۱- نتایج بهینه‌سازی

در این قسمت، نتایج گرادیان تابع هدف معادلات الحاقی گسسته برای صحت‌سنجی با نتایج روش حل اختلاف محدود مقایسه می‌شوند. در مثال اول نتایج گرادیان تابع هدف پسا روی محک اول در شکل ۱۳ ارزیابی شده است. محور طولی متغیرهای طراحی بر حسب ثوابت توابع هیگز-هنه است که ۳۰ ثابت اول مربوط به سطح زیرین ایرفویل و ۳۰ ثابت دوم مربوط به سطح برین می‌باشند. در اینجا به خاطر تشابه نتایج، تنها نتایج مربوط به حالت با پیش‌شرطی نشان داده می‌شوند. توافق خوبی بین نتایج الگوریتم‌ها در دو روش الحاقی و اختلاف محدود دیده می‌شود. در گام بعدی، بهینه‌سازی این ایرفویل با روش الحاقی انجام شده است که نتایج ضریب فشار اولیه و انتهای بهینه‌سازی در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود. هر دو الگوریتم بالادست "رو" و CUSP در انتهای بهینه‌سازی به جریان بدون موج ضربه‌ای رسیده‌اند، ولی در الگوریتم JST، همچنان موج ضربه‌ای کوچکی باقیمانده است.

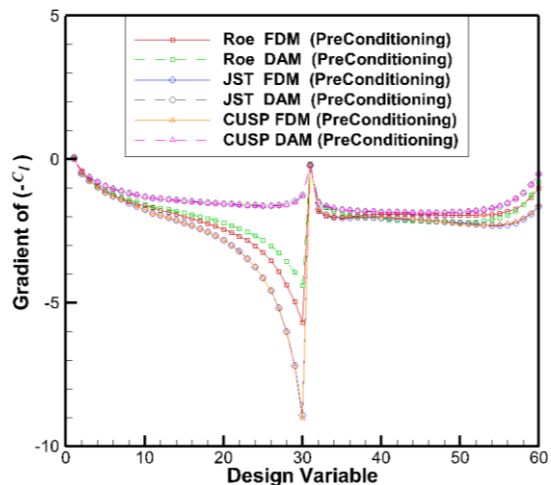
در مثال دوم، بهینه‌سازی محک دوم انتخاب شده است که در جریان کم-سرعت است. در اینجا تابع هدف، افزایش ضریب برآ انتخاب شده است. نمودار گرادیان این تابع بر حسب متغیر طراحی در شکل ۱۵ رسم شده است. اختلاف بین روش الحاقی گسسته و روش اختلاف محدود در بعضی از متغیرهای طراحی بخصوص در سطح زیرین ایرفویل در نزدیکی لبه فرار قابل توجه است، اما جهت گرادیان‌ها اختلافی

و اصلاح شبکه در هر مرحله بهینه‌سازی از روش میانبایی "وزن‌دهی معکوس فاصله" (IDW) استفاده شده است [۳۲].

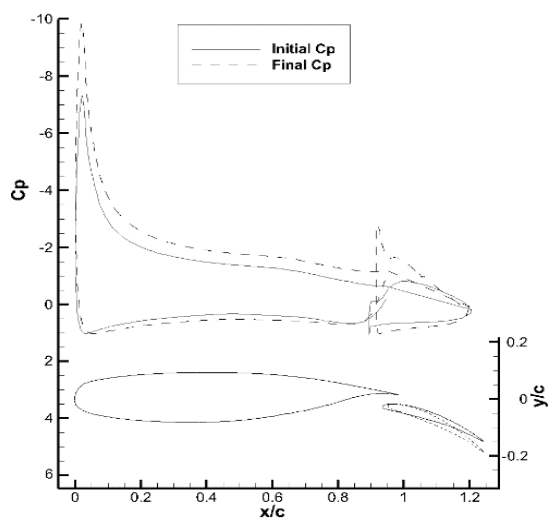
۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شکل پیش‌شرطی در الگوریتم‌های بالادست "رو"، الگوریتم CUSP و الگوریتم JST در جریان لزج روی شبکه بی‌سازمان پیاده‌سازی شدند و بهینه‌سازی آیرودینامیکی روش الحاقی روی آنها بررسی شد. نتایج نشان داد که پیش‌شرطی، همگرایی باقیمانده را در اعداد ماخ کم در هر سه الگوریتم بهبود می‌بخشد. در ادامه نتایج عددی با نتایج تجربی هم در سرعت‌های کم و هم سرعت‌های بالا مقایسه شدند. نتایج نشان دادند که در سرعت‌های بالا، هر دو شکل پیش‌شرطی و عادی مشابه هستند، اما در سرعت‌های کم، همگرایی ضرایب آیرودینامیکی و نرخ همگرایی باقیمانده‌ها در حالت بدون پیش‌شرطی کاهش می‌یابد. این وضعیت در اعداد ماخ خیلی کم همچون $M=0.05$ ، بیشتر قابل مشاهده است. در مقایسه الگوریتم‌های بالادست "رو" و الگوریتم CUSP تغییر چندانی در ضرایب فشار و ضرایب آیرودینامیکی مشاهده نمی‌شود، ولی به لحاظ هزینه محاسباتی، الگوریتم CUSP کم هزینه‌تر است. در محک اول، کمی اختلاف بین نتایج تجربی و الگوریتم JST مشاهده می‌شود. در ایرفویل دو المانی نیز نتایج سه الگوریتم، توزیع فشار مشابهی را نشان می‌دهد که تطابق خوبی با نتایج تجربی نیز دارند. در نتایج قسمت بهینه‌سازی، مشاهده می‌شود که گرادیان تابع هدف پسا بر حسب متغیرهای طراحی، در هر دو روش الحاقی و اختلاف محدود در تمامی الگوریتم‌ها به هم نزدیک هستند، اما در سرعت‌های کم، گرادیان تابع هدف برآ بین دو روش الحاقی و اختلاف محدود بخصوص در سطح زیرین ایرفویل نزدیک به لبه فرار اختلاف دارند. این اختلاف در الگوریتم بالادست "رو" کمتر از الگوریتم CUSP و JST است، اما به هر حال در هر سه الگوریتم جهت گرادیان یکسان و درست است. نتایج نشان می‌دهد، دو الگوریتم بالادست "رو" و CUSP توانسته‌اند، موج ضربه‌ای روی ایرفویل را از بین ببرند و جریان کاملاً بدون موج ضربه‌ای با ضرایب فشار نزدیک به هم در نهایت حاصل شده است، در حالی که در الگوریتم JST، همچنان موج ضربه‌ای کوچکی باقیمانده است. در ایرفویل دو المانی، نتایج

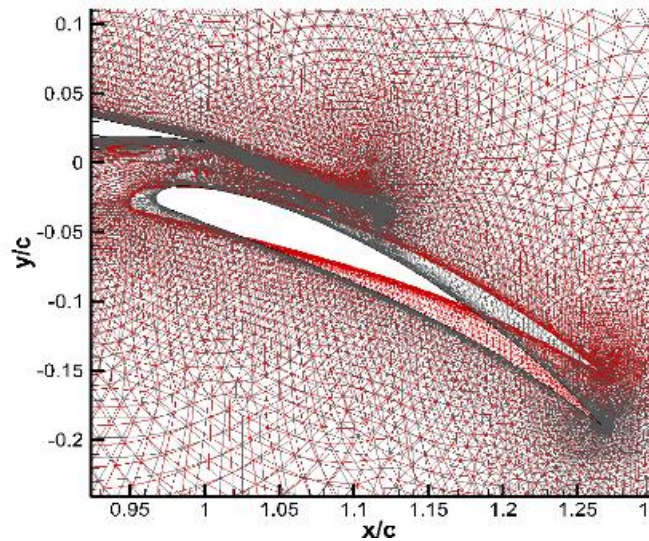
ندارد که این موضوع حرکت به سمت نقطه بهینه را تصدیق می‌کند. این اختلاف در الگوریتم CUSP و JST بیشتر است. در مثال سوم، بهینه‌سازی محک کم-سرعت ایرفویل-فلپ NLR7301 انتخاب شده است. در اینجا تابع هدف افزایش ضریب برآ و متغیرهای طراحی زاویه چرخش فلپ، موقعیت‌های طولی و عرضی فلپ نسبت به لبه فرار ایرفویل اصلی می‌باشند. نتایج برای روش بالادست "رو" به همراه کانتور و شبکه اولیه و نهایی در شکل ۱۶ و ۱۷ نشان داده شده‌اند. اختلاف در ابعاد هندسی شکل ۱۷ و شکل ۱۲ ناشی از تغییر مقیاس شبکه در زمان حل جریان برای دستیابی دقیق به عدد رینولدز مرجع تجربی است. در این حالت تغییر



شکل ۱۵- گرادیان ضریب برآ در شرایط محک دوم



شکل ۱۶- بهینه‌سازی ضریب برآ در شرایط محک سوم



شکل ۱۷- اصلاح فلپ و شبکه در ایرفویل-فلپ NLR7301

- [6] Frink NT (1992) Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes. *AIAA J* 30(1): 70-77.
- [7] Volkov K, Karpenko AG (2015) Preconditioning of gas dynamics equations in compressible gas flow computations. *Comput Math Math Phys* 55(6): 1058-1075.
- [8] Goharshadi M, Mirzaei M (2019) A viscous all-speed solver development based on Roe upwind scheme in unstructured database. *Modares Mechanical Engineering* 34(9): 402-410. (In Persian)
- [9] Jameson A (1995) Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics I, artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. *Int J Comput Fluid Dyn* 4(3): 171-218.
- [10] Tatsumi S, Martinelli L, Jameson A (1995) A new high resolution scheme for compressible viscous flows with shocks. *AIAA 33rd Aerospace Sciences Meeting Reno, Nevada*.
- [11] Nemecek M, Zingg DW (2000) Aerodynamic computations using the convective-upstream split pressure scheme with local preconditioning. *AIAA J* 38(3): 402-410.
- [12] Katz A, Folkner D, Sankaran V (2015) An unsteady preconditioning scheme based on convective-upwind split-pressure (CUSP) artificial dissipation. *Int J Numer Methods Fluids* 78(1): 1-16.
- [13] Jameson A, Schmidt W, Turkel E (1981) Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA J* 81: 1259.

مشابه یکدیگرند. در اینجا نتایج الگوریتم بالادست "رو" بهبود توزیع فشار و تولید ضریب برآی فلپ را نشان می‌دهد که ناشی از زاویه فلپ و جابجایی آن است.

بررسی کلی این نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم CUSP دارای سرعت بیشتری در همگرایی است و برای بهینه‌سازی پیشنهاد می‌شود. در سرعت‌های کم، اگر چه نتایج بهینه‌سازی سه الگوریتم یکی است، لذا با توجه به دقت بیشتر محاسبه گرادیان در الگوریتم بالادست "رو"، بهتر است، این الگوریتم و الگوریتم CUSP هر دو امتحان شوند.

۹- مراجع

- [1] Chorin AJ (1997) A numerical method for solving incompressible viscous flow. *J Comput Phys* 135(2): 118-125.
- [2] Darbandi M, Mokarizadeh V, Roohi E (2007) Developing a shock-capturing formulation with higher performance to capture normal standing shock in all-speed regime. *Esteghlal* 25(2): 167-181. (In Persian)
- [3] Choi YH, Merkle CL (1991) Time-derivative preconditioning for viscous flows. *AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Laser Conference*. *AIAA J* 91: 1652.
- [4] Turkel E, Radespiel R, Kroll N (1997) Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics. *Comput Fluids* 26(6): 613-634.
- [5] Roe PL (1981) Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J Comput Phys* 43(2): 357-372.

- [23] Venkatakrishnan V (2015) Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters. *J Comput Phys* 118(1): 120-130.
- [24] Kitamura K, and Shima E (2012) Simple and parameter-free second slope limiter for unstructured grid aerodynamic simulations. *AIAA J* 50(6): 1415-1426.
- [25] Weiss J, Smith WA (1995) Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA J* 33(1): 2050-57.
- [26] Hicks RM, Henne PA (1978) Wing design by numerical optimization. *J Aircr* 15(1): 407-412.
- [27] Nielsen J, Kyle Anderson W (2001) Recent Improvements in Aerodynamic Design Optimization On Unstructured Meshes. *AIAA J*. 0596.
- [28] Cook PH, McDonald MA, Firmin MCP (1994) Aerofoil RAE 2822-Pressure distributions and boundary layer and wake measurements. *Agard Ar* 138: A6-1 to A6-77.
- [29] Gregory N, O'Reilly CL (1970) Low Speed Aerodynamic Characteristics of NACA0012 Airfoil Section, Including the Effects of Upper Surface Roughness Simulation Hoarfrost. National Physical Laboratory, NPL Aero Report, 1308.
- [30] Holley BM, Hardin LW (2020) Skin friction measurements of transition in high Reynolds number. *Adverse Pressure Gradient Flow J Turbomach* 142(2).
- [31] Van der Berg B (1979) Boundary layer measurements on a two-dimensional wing with flap, NLR TR 79009 U.
- [32] Bartier PM, Keller CP (1996) Multivariate interpolation to incorporate thematic surface data using inverse distance weighting (IDW). *Comput Geosci* 22(1): 795-799.
- [14] Dwight R, Brezillon J (2006) Effect of various approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization. *Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences, Reno Nevada, AIAA 2006: 0690.*
- [15] Colin Y, Hugues D, Boussuge JF (2011) A robust low speed preconditioning formulation for viscous flow computations. *Comput Fluids* 47: 1-15.
- [16] Jameson A (1995) Optimum aerodynamic design using CFD and control theory. *AIAA J* 95: 1729.
- [17] Jameson A, Martinelli L, Pierce N (1997) Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno Nevada, AIAA J 97: 0101.
- [18] Nadarajah S, Jameson A (2001) Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic shape optimization. *AIAA 15th CFD Conference* 530 Anaheim, CA.
- [19] Moigne AL, Qin N (2004) Variable-fidelity aerodynamic optimization for turbulent flows using a discrete adjoint formulation. *AIAA J* 42(7): 1281-1292.
- [20] Asouti VG, Zymaris AS, Papadimitriou DI, Giannakoglou KC (2008) Continuous and discrete adjoint approaches for shape optimization with low Mach number preconditioning. *Int J Numer Methods Fluids* 57(1): 1485-1504.
- [21] Ritlop R, Nadarajah S (2009) Design of wind turbine profiles via a preconditioned adjoint-based aerodynamic shape optimization. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Orlando, Florida.*
- [22] Allmaras SR, Johnson FT, Spalart PR (2012) Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model. *ICCFD7-1902, 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Big Island, Hawaii.*