



تحلیل فرکانسی تیرهای متخلخل مدرج تابعی دو جهته با سطح مقطع متغیر روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم ردی

محمد امین فرقانی^۱، یوسف بازرگان لاری^{۲*}، پرهام زاهدی نژاد^۳ و محمد جواد کاظم زاده پارسی^۳

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

^۳ دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۱۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۰۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷

چکیده

در این مقاله، تحلیل فرکانسی تیرهای مدرج تابعی دو جهته مقطع متغیر بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی ردی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات خواص مکانیکی بر اساس دو مدل قانون نمایی و قانون توانی توزیع کسر حجمی و توزیع ماده تعیین می‌شود. با بکارگیری تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و با اعمال اثر بستر الاستیک خطی، با استفاده از اصل همپلتون، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله حاصل می‌شود. با توجه به پیچیدگی حل بسته ای این معادلات، معادلات دیفرانسیل حاکم با فرض شرایط مرزی از نوع تکیه گاه مختلف، به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته حل می‌شوند. به منظور صحت سنجی، نتایج به دست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از سایر مقالات مقایسه می‌شوند. در نهایت اثر نوع مدل مدرج تابعی، پارامترهای هندسی، شاخص گرادایان خواص مواد در دو جهت، شرایط مرزی، ضرائب بستر الاستیک و تخلخل روی فرکانس طبیعی تیرهای مدرج تابعی دو جهته مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی بی بعد با افزایش ضرائب بستر افزایش یافته و افزایش در ضریب تخلخل و گرادایان ماده در دو جهت، سبب کاهش شدید در فرکانس‌های بی بعد می‌شود. نتایج این بررسی در طراحی بهینه، کنترل ارتعاش و بررسی تشخیص ساختار شکست سازه‌های مدرج تابعی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل فرکانسی؛ مدرج تابعی دو جهته؛ متخلخل؛ مقطع متغیر؛ وینکلر - پاسترناک؛ تئوری مرتبه سوم ردی.

Frequency Analysis of Bi-directional Porous Functionally Graded Beams with Variable Cross Section on Elastic Foundation Using Reddy Third Order Shear Deformation Theory

M.A. Forghani¹, Y. Bazargan-lari^{2*}, P. Zahedinejhad², M.J. Kazemzadeh Parsi³

¹ Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran.

² Assist. Prof., Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran.

³ Assoc. Prof., Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran.

Abstract

In this paper, frequency analysis of Bi-directional Porous functionally graded beams with variable cross section which are resting on elastic foundation based on Reddy third order shear deformation theory is studied. Mechanical property gradients defined in accordance with two models of exponential and volume fraction power law. Governing equation which is obtained with the aid of third order shear deformation theory and by considering elastic foundation effect in conjunction with Hamilton's principle. Due to intrinsic closed form solution of equations, differential equations solved with using Generalized Differential Quadrature Method by considering various end conditions. In order to validate the results comparisons are made with solutions which are available for other papers. Eventually the effects of geometrical parameters, power and exponential law indexes and elastic foundation coefficients on natural frequencies of Bi-directional FGM beams is studied. The results reveal that non dimensional frequencies increase with the rise of elastic foundation coefficients and the soar of porosities and material gradients in two directions causes a sharp decrease in non dimensional frequencies. The results of this study can be used in optimal design, vibration control and detection of failure structure of functional graded structures.

Keywords: Frequency Analysis; Bi-directional FGM; Porous; Variable Cross Sectional Beam; Winkler Pasternak; Third Order Reddy Theory.

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. قابل توجه است که به‌علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی مشکلات عدم پیوستگی که در سازه‌های کامپوزیتی موجود است، در مواد مدرج تابعی بوجود نمی‌آیند. مواد مدرج تابعی در موارد مختلفی چون حسگرهای مدرج تابعی، زره‌های مدرج تابعی، حسگرهای نوری و ایمپلنت دندانپزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. برای مدل سازی رفتار دینامیکی و استاتیکی تیرها تئوری‌های متفاوتی وجود دارد. هر کدام از این تئوری‌ها مبتنی بر فرضیات، مزایا، محدودیت‌ها و کاربردهایی هستند. از جمله شناخته‌ترین تئوری‌های موجود می‌توان به تئوری تیر کلاسیک که با نام تئوری تیر اویلر برنولی^۲ نیز شناخته می‌شود، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که با نام تئوری تیر تیموشنکو^۳ نیز شناخته می‌شود و تئوری‌های مرتبه بالای برشی مانند تئوری برشی مرتبه سوم اشاره کرد که یکی از آنها به نام تئوری تیر ردی شناخته می‌شود. مطالعات مختلف در مورد مواد هدفمند در محیط مکانیکی و حرارتی در مقالات یافت شده است. وان وزانگ [۲] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج هدفمند بر مبنای تئوری کلاسیک برنولی و تئوری برشی مرتبه اول پرداختند و معادلات حاکم را برای شرایط مرزی مختلف به روش عددی شوتینگ حل کردند. ژبو [۳]، به بررسی ارتعاشات تیرهای هدفمند با استفاده از روش عددی المان محدود برای شرایط مرزی مختلف پرداخت. در این مطالعه از تئوری تیرهای برنولی و تیموشنکو برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. کرمانلی رفتار ارتعاشات آزاد تیر FGM با خواص متغیر در دو جهت و با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بررسی نمود. خواص ماده در دو جهت و به‌صورت نمایی تغییر می‌کرد. در این تحقیق پاسخ ارتعاشات آزاد با استفاده از معادلات لاگرانژ بدست آمد. جایجایی عرضی، طولی و چرخش سطح مقطع

به‌شکل چند جمله‌ای به طوری در نظر گرفته شد که شرایط مرزی را ارضا کند [۴]. ممقانی و همکاران [۵]، به تحلیل و حل دقیق ارتعاشات عرضی تیرهای ناهمگن محوری نمایی با شرایط مرزی مختلف پرداختند. در این مقاله مشخص گردید که فرکانس‌های طبیعی تیر و شکل مودهای سیستم، بشدت تحت تاثیر شرایط مرزی و شاخص گرادبان مواد هستند. اغلب تیرهای مکانیکی در کاربردهای مهندسی مختلف روی زمین استوار هستند. این شامل خطوط راه آهن، مناطق ژئوتکنیک، پیاده روهای بزرگراه، سازه‌های ساختمانی، سازه‌های دریایی، انتقال برج‌ها و خطوط لوله می‌شوند. این انگیزه بسیاری از محققان برای تجزیه و تحلیل رفتار از ساختارهای تیرها بر روی بسترهای الاستیک مختلف است [۱]. در بسیاری از مسائل ساختار خاک، بستر الاستیک معمولاً توسط پایه ویکنلر^۴ بخاطر سادگی ریاضی مدل شده است. با این حال، نشان داده شده است که رفتار مواد بستر در علم مهندسی نمی‌تواند توسط این مدل نمایان شود که شامل فنرهای کششی خطی مستقل است. پاسترناک^۵ به‌منظور یافتن یک مدل پایه فیزیکی و ریاضی ساده، بستری به نام دو پارامتر را با تعاملات برشی پیشنهاد کرد. اولین پارامتر بستر مشابه مدل الاستیک مبتنی بر وینکلر است و پارامتر دوم، ثابت سختی لایه برشی در مدل بستر پاسترناک است. یک روش دقیق برای تحلیل ارتعاش تیرهای ایزوتروپیک روی پایه‌های الاستیک متغیر یک و دو متغیره توسط ایزنبرگر [۶] ارائه شده است. سوال کتال [۷] به بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد تیرها روی بستر خاک با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی پرداخت. ملک زاده و کرمی [۸]، با استفاده از یک روش ترکیبی مربعات دیفرانسیلی و روش اجزای محدود برای مطالعه ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای ضخیم ایزوتروپیک روی پایه الاستیک دو پارامتر استفاده کردند. آنها نشان دادند که این روش حل ترکیبی، روشی بسیار موثر و دقیق برای حل تیرهای دوبعدی و قابل تعمیم به پوسته‌های سه بعدی است. محمدی مهر و همکاران [۹] به تحلیل ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی قرار گرفته روی بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری

⁴ Winkler⁵ Pasternak¹ FGM, Functionally Graded Material² EBT, Euler Bernoulli Beam Theory³ TBT, Timoshenko Beam Theory

مشخص گردید. اخیراً بمنظور برطرف نمودن نیازهای مهندسی سازه‌ای، ریلی، هوایی و پره توربین‌های نیروگاهی استفاده از تیرهای با مقطع غیر یکنواخت^۲ مرسوم گردیده است. در این راستا، سرگ ابراته به بررسی ارتعاشات تیرهای مقطع متغیر پرداخت وی راه حل تحلیلی دقیق برای این نوع تیرها با روش ابتکاری تبدیل آنها به تیرهای مقطع ثابت در شرایط مرزی مختلف ارائه کرد [۱۴]. شهباء، عطارنژاد و حاجیلار [۱۵]، به بررسی ارتعاشات و پایداری تیرهای تیموشنکو مدرج تابعی غیر یکنواخت طولی با استفاده از روش حل اجزای محدود پرداختند در این بررسی تاثیر ضریب تغییر سطح مقطع بر بار کمانش و ارتعاشات تیر مورد بررسی قرار گرفت. فیرات کالیم به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی با مقطع غیر یکنواخت طولی با استفاده از تئوری تیموشنکو پرداخت و سپس دستگاه معادلات حاکم را در دامنه لاپلاس را با به‌کارگیری توابع مکمل در روش الگوریتم دوربین بهبود یافته برای شرایط مرزی مختلف حل کرد و تاثیر ضریب باریک شونده بر ارتعاشات تیر مدرج تابعی محوری در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داد [۱۶]. کنترل بهینه ارتعاشات عرضی تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر توسط رحمانی و همکاران [۱۷]، با استفاده از تئوری اویلر برنولی و به روش تفاضل محدود انجام گردید. نواب شفیع و محمد کاظمی [۱۸]، به بررسی کمانش تیرهای مدرج دو جهته متخلخل با مقطع غیر یکنواخت پرداختند. در این مطالعه، معادلات حاکم با استفاده از تئوری اویلر برنولی و به روش تئوری الاستیسیته غیر محلی بدست آمده و از روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حاکم بهره گرفته شده است. در این بررسی نشان داده شد، افزایش مقدار ضریب تخلخل در تیر سبب کاهش سفتی تیر و در نتیجه سبب کاهش نیروی کمانش آن می‌شود. با پیشرفت سریع در تکنولوژی المان‌های سازه، سازه‌های متخلخل^۳ مدرج می‌تواند به‌عنوان یکی از آخرین پیشرفت‌ها در مواد مدرج تابعی معرفی گردد. تخلخل باعث ایجاد فرصت خوبی در پیشرفت در زمینه خواص مکانیکی سازه‌های مهندسی خواهد شد. یکی از کاندیدهای اصلی برای سازه‌های تحت

برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. در این تحقیق تاثیر بستر الاستیک بر افزایش پایداری سازه بررسی شده است. اکباس آنالیز خمش استاتیک و ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج روی بستر ویکنلر را با تئوری‌های اویلر و تیموشنکو مورد بررسی قرار داد و نتایج این دو تئوری را با توجه به نسبت‌های هندسی و شرایط مرزی مقایسه کرد [۱۰]. با پیشرفت تکنولوژی تولید در علوم مادی، به دلیل نیازهای جدید، مواد درجه بندی شده متشکل از دو (یا بیشتر) مواد مختلف توسعه یافته است. بیشتر مطالعات اولیه ساختار مواد مدرج را نشان می‌دهد که خواص آن تنها در یک جهت متغیر است. در این حالت تمام سطوح درونی یا بیرونی یک ترکیب مشابه دارند. در حالیکه توزیع مواد مدرج معمولی در برخی از طرح‌های کاربردی مهندسی مانند شاتل فضایی و صنایع نیروگاهی بدلیل آنکه توزیع دما یا توزیع تنش در ساختار قسمت‌هایی از این ماشین‌های پیشرفته می‌تواند در دو یا سه جهت باشد، به صرفه نیستند. با توجه به این واقعیت نیاز به نوعی جدید از مواد مدرج تابعی است که خواص آنها در دو یا سه جهت متفاوت باشد تا مواد مقاوم تری در برابر حرارت بدست آید. تا کنون تحقیقات کمی در مورد مواد مدرج تابعی دو جهته^۱ وجود داشته است. از جمله یک تحقیق جدید توسط وانگ، ژو و چنگ [۱۱] به بررسی ارتعاشات تیرهای هدفمند دو جهته نمایی پرداختند. آنها در این تحلیل از تئوری اویلر برنولی استفاده نموده، معادلات حاکم را استخراج نموده و به روش تحلیلی حل کردند. ترشیزیان و همکاران [۱۲]، به تحلیل ارتعاشات تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد تابعی دو بعدی در فضای حالت به روش لوی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پرداخته‌اند. در این مقاله مشخص گردید که مقدار فرکانس‌های طبیعی تیرهای دو جهته نسبت به تیرهای یک جهتی در شرایط یکسان بیشتر است. مسوت سیمسک [۱۳] ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای دو جهته مدرج تابعی نمایی را با استفاده از تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق پاسخ دینامیکی تیرهای مدرج تابعی دو جهته بر اساس تغییرات نسبت لاغری، گرادیان خواص مواد، شرایط مرزی مختلف و نرخ بارگذاری خارجی

^۲ Tapered Beam^۳ Porous Structures^۱ Bi Directional FGM

پاسترناک تحت اثر نیروی خارجی هارمونیک پرداخته‌اند. آنها در این تحقیق اثر پارامترهای هندسی، ضرایب بستر و گرادیان ماده را بر پایداری دینامیکی تیر مدرج تابعی دوجته در شرایط مرزی مختلف بررسی کرده‌اند [۲۴]. ژیان لی و همکاران به بررسی پس کمانشی^۳ غیر خطی تیرهای مدرج تابعی توانی دو جهته روی بستر الاستیک با یک تئوری مرتبه سوم ابتکاری پرداختند در این تحقیق بار بحرانی کمانشی و تعادل پس کمانشی تیر با استفاده از ترکیب روش نیوتن رافسون و مربعات دیفرانسیلی در شرایط مرزی مختلف بدست آمد [۲۵]. روش مربعات دیفرانسیلی^۴ در دهه هفتاد میلادی توسط بلمان به‌عنوان جایگزینی بهتر برای تکنیک‌های اختلاف محدود، المان محدود و المان مرزی در حل مسایل مقدار اولیه و مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی ارائه شد. مزیت این روش نسبت به تکنیک‌های دیگر، سرعت محاسبات و استفاده از گره‌های کمتر بود. در این روش بر خلاف روش‌های دیگر مانند تفاضل محدود^۵، مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه به‌صورت جمع خطی مقادیر وزن یافته همان تابع در تمام نقاط دامنه تخمین زده می‌شود. این فرض باعث بالا رفتن دقت و کاهش چشمگیر در حجم محاسبات می‌شود. با این حال این روش نیز محدودیت‌هایی مانند مشکلات در گسسته‌سازی دامنه و همچنین محاسبه ضرایب وزنی نقاط دامنه دارد [۲۶]. برای رفع نواقص آن، روش تعمیم یافته مربعات دیفرانسیلی^۶ به‌عنوان فرم اصلاح شده این روش در ابتدای دهه نود میلادی توسط شاو و ریچاردز برای حل معادلات ناویر-استوکس دو بعدی ارائه شد و از آن پس در مسائل مختلف الاستیسیته برای ورق‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار گرفت [۲۶].

مروری بر ادبیات تحقیق نشان می‌دهد که تا کنون در زمینه ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی دوجته اغلب از تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو استفاده گردیده است. در این مقاله ارتعاشات آزاد تیرهای متخلخل مدرج تابعی دوجته با مقطع متغیر روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم ردی برای کاربرد در تیرهای ضخیم مورد بررسی

بارهای ضربه‌ای یا دینامیکی، مواد مدرج تابعی متخلخل هستند که به‌طور فوق العاده‌ای جاذب انرژی هستند. تخلخل ممکن است، خواص مکانیکی و الاستیسیته را تغییر دهد. مطالعات روی تحلیل ارتعاشی سازه‌های متخلخل به‌طور ویژه برای تیرها تا کنون به‌تعداد محدودی انجام پذیرفته است. چنگ و یان به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای هدفمند متخلخل پرداختند. آنها در این تحقیق به بررسی تیرهای متخلخل ناهمگن پرداخته و با اصل لاگرانژ و تئوری تیرهای تیموشنکو معادلات حاکم را استخراج نموده و به روش عددی ریتز جواب معادلات را استخراج نمودند [۱۹] فودا و همکارانش [۲۰]، اثر تخلخل را روی رفتارهای مکانیکی تیرهای مدرج تابعی با توزیع توانی مورد بررسی قرار دادند که با فرض تئوری تیر کلاسیک معادلات حاصل شد. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول از ضریب تصحیح برشی^۱ بمنظور اصلاح تنش در حالت واقعی و تئوری استفاده می‌شود. بمنظور بالابردن دقت مساله، حذف اثر ضریب اصلاح برشی و پیشبینی بهتر رفتار تیرهای ضخیم، تئوری تیرهای مرتبه سوم برشی^۲ پیشنهاد گردیده است. این تئوری بر مبنای فرض تغییرات شکل طولی تیر با درجه ۹ بالاتر نسبت به‌عرض تیر در نظر گرفته شده است [۱]. مسوت سیمسک [۲۱] به بررسی فرکانس‌های پایه ارتعاشی تیرهای مدرج عرضی بر اساس تئوری‌های مختلف مراتب بالاتر پرداخت. وی معادلات حاکم را با استفاده از معادله لاگرانژ استخراج کرد؛ همچنین پرادهان و چاکراورتی ارتعاشات آزاد تیرهای هدفمند مدرج عرضی و در شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حاکم را با استفاده از تئوری مراتب بالاتر و روش رایلی ریتز استخراج کردند [۲۲]. رحیمی و همکاران [۲۳]، به بررسی ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی مدل نمایی یک جهته با وجود ترک عرضی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی و روش حل ریتز پرداختند. در این بررسی مشخص گردید که استفاده از نظریه برشی مرتبه اول برای تیرهای نازک و نظریه مرتبه سوم برشی برای تیرهای ضخیم مناسب تر است. قربانپور و نیکنژاد به بررسی پایداری دینامیکی تیرهای مدرج تابعی دوجته روی بستر الاستیک

³ Postbuckling

⁴ DQM, Differential Quadrature Method

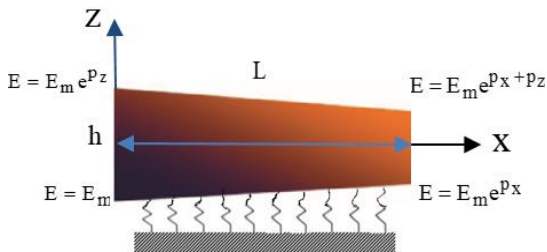
⁵ FDM, Finite Difference Method

⁶ GDQM, Generalized Differential Quadrature Method

¹ Shear Correction Factor

² Third Order Shear Deformation Theory

در شکل ۱ نحوه تغییرات مواد پایه در تیر تابعی مدرج دو جهتی غیر یکنواخت نشان داده می‌شود.



شکل ۱- تغییرات مواد پایه در تیر مدرج تابعی دو جهته

خصوصیات ماده در این حالت همزمان در دو جهت x و z بصورت نمایی به فرم زیر تغییر می‌کند [۴].

$$P(x,z) = P_m e^{p_x \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$E(x,z) = E_m e^{p_x \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\rho(x,z) = \rho_m e^{p_x \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)} \quad (1)$$

P معرف هر خصوصیتی از ماده است. E مدول یانگ بوده و ρ چگالی ماده است. در این فرمول E_m و ρ_m خصوصیات ماده مرجع (فلز) در نقطه مرجع صفر هستند. P_x و P_z شاخص‌های نمایی تغییرات ماده به ترتیب در جهت x و z می‌باشند. زمانی که P_x و P_z صفر شوند، تیر همگن می‌شود [۴]. همچنین بمنظور ادامه بررسی، استخراج و مقایسه نتایج اثرات بستر، تخلخل و کاهش ضخامت تیر، مدل کسر حجمی توانی نیز به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۸].

$$P(x,z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z} \left(\frac{x}{1}\right)^{p_x} - \frac{e_0}{2} (P_c + P_m)$$

$$E(x,z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z} \left(\frac{x}{1}\right)^{p_x} - \frac{e_0}{2} (E_c + E_m)$$

$$\rho(x,z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{p_z} \left(\frac{x}{1}\right)^{p_x} - \frac{e_0}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad (2)$$

قرار می‌گیرد که تا کنون با این روش انجام نگردیده است. ماده مدرج تابعی این تیرها به صورت ترکیبی از دو فاز در نظر گرفته شده است که توزیع کسر حجمی این دو فاز با استفاده از دو مدل قانون کسر حجمی توانی و قانون نمایی در دو جهت طولی و عرضی تیر حاصل می‌شود. معادلات حاکم و شرایط مرزی آنها، با استفاده از اصل همپلتن^۱ بدست می‌آیند. این معادلات به کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته گسسته سازی شده و حل می‌شوند و به این ترتیب، مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی دو جهته به دست می‌آیند؛ همچنین اثر پارامترهای هندسی، گرادیان ماده، شرایط مرزی، نوع مدل مدرج تابعی، ضریب باریک شونده، تخلخل و بستر الاستیک بر ارتعاش آزاد این نوع تیرها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این تحقیق کاربرد ویژه‌ای در طراحی بهینه، کنترل ارتعاشات و جلوگیری از شکست سازه‌های مدرج تابعی دو جهته در صنایع دارد.

۲- تئوری، فرمول بندی و معادلات حاکم

۲-۱- خصوصیات مواد مدرج تابعی دو جهته

مدلهایی که برای توزیع خواص در مواد تابعی مدرج وجود دارد، رابطه‌ای ریاضی برای هر خاصیت در هر نقطه‌ای دلخواه از ماده بیان می‌کنند. این رابطه بر حسب مختصات نقطه و خواص ابتدا و انتها (دو جزء تشکیل دهنده ماده تابعی مدرج) تعریف می‌شود. از بین مدل‌های مختلفی که برای توزیع خواص در مواد تابعی مدرج وجود دارد، مدل کسر حجمی توانی و مدل نمایی انتخاب می‌شود که در اکثر مطالعات استفاده می‌شود. به علاوه در این تحقیق تیرهای ساخته شده از مواد مدرجی که خواص آنها در دو راستای ضخامت و طول تغییر می‌کند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. که در آن x ، z به ترتیب، مختصات یک نقطه دلخواه از تیر در راستای طول و ضخامت تیر می‌باشند. P_x و P_z نمای قانون توانی و نمایی در دو جهت x و z می‌باشند و می‌توانند مقادیر بین صفر تا بینهایت را به خود اختصاص دهند؛ همچنین L و h نمایانگر طول و ارتفاع تیر هستند.

¹ Hamilton's Principle

(۲) مولفه خمشی از جابجایی طولی شبیه مولفه تئوری برنولی است. (۳) مولفه برشی از جابجایی طولی به گونه‌ای به تغییرات مرتبه سه کرنش برشی (و به تبع آن تنش برشی) در ضخامت تیر افزایش می‌یابد که تنش برشی در سطوح بالا و پایین تیر صفر می‌شود. بر اساس این فرضیات میدان جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$U(x,z,t) = u(x,t) - z \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}$$

$$W(x,z,t) = w_b(x,t) + w_s(x,t) \quad (3)$$

که در آن U ، w_b و w_s به ترتیب معرف جابجایی طولی، خمشی و برشی تیر در یک نقطه از صفحه میانی تیر هستند. تابع شکل $f(z)$ مشخص کننده شکل توزیع کرنش برشی عرضی و تنش برشی در ضخامت تیر است که شرایط مرزی تنش صفر را در سطوح بالا و پایین تیر ارضا می‌کند. بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی تیر ردی، تابع شکل $f(z)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \quad (4)$$

۲-۴- معادلات حاکم ارتعاشات تیر بر مبنای تئوری تغییر شکل مرتبه سوم ردی

در این تئوری از فرض تنش صفحه‌ای استفاده می‌شود. به عبارت دیگر $\sigma_{zz} = 0$ به علاوه در استخراج معادلات حاکم فرضیات زیر لحاظ شده است. الف) تغییر شکل‌ها کوچک. ب) وجود بارگذاری حرارتی با دمای ثابت. بر اساس میدان جابجایی در نظر گرفته شده در این تئوری می‌توان کرنش‌ها و در نتیجه تنش‌ها را در تیر به صورت زیر استخراج کرد [۴].

$$\sigma_{xx} = E(x,z) \left(-z \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xz} = G(x,z) \left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right) \quad (5)$$

همچنین با استفاده از اصل همیلتن، معادلات حاکم ارتعاشات آزاد تیر دو جهته قابل استخراج است [۱].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U - \delta V_{ef}) dt = 0 \quad (6)$$

که در آن P معرف هر خصوصیتی از ماده است. E مدول یانگ بوده و ρ چگالی ماده است. E_c و ρ_c خصوصیات ماده سرامیک در نقطه مرجع صفر هستند. E_m و ρ_m مدول یانگ و چگالی فلز می‌باشند. p_x و p_z شاخص‌های توانی تغییرات ماده به ترتیب در جهت x و z می‌باشند. زمانیکه p_x و p_z صفر شوند، تیر کاملاً همگن سرامیک می‌شود و زمانی که شاخص‌های گرادیان ماده به سمت بینهایت برود، تیر کاملاً فلز می‌شود. e_0 ضریب تخلخل است که مقدار آن $0 < e_0 < 1$ است. $e_0 = 0$ معرف تیر متشکل از ماده کامل و بدون تخلخل است [۱۸].

۲-۲- معادلات حرکتی حاکم

برای مدلسازی تیرهای ضخیم باید از تئوری‌های دقیق‌تر از تئوری اولر برنولی استفاده کرد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یا تئوری تیر تیموشنکو، به عنوان یکی از پرکاربردترین تئوری‌های مورد استفاده در مدلسازی تیرهای نسبتاً ضخیم است؛ زیرا علی‌رغم سادگی، دقت خوبی در مقایسه با تئوری مرتبه بالاتر دارد. در این تئوری فرض می‌شود که هر مقطع عرضی از تیر به صورت صفحه‌ای صاف باقی می‌ماند، ولی بر خلاف تئوری اولر برنولی این صفحه الزاماً عمود بر صفحه میانی تیر نیست. در این تئوری اثر تنش‌های برشی نیز در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی این تئوری دارای دقت بیشتری نسبت به تئوری کلاسیک است و برای تیرهای نسبتاً ضخیم (تیرهای با نسبت طول به ضخامت ۵ تا ۱۰) به کار می‌رود.

۲-۳- تئوری برشی مرتبه سوم ردی

برای افزایش دقت و اجتناب از استفاده فاکتور تصحیح برش بویژه در تیرهای ضخیم، تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله مهم‌ترین این تئوری‌ها می‌توان به تئوری برشی مرتبه سوم ردی اشاره کرد. در این تئوری بر خلاف تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول، سطح مقطع تیر دیگر به صورت سطح صاف در نظر گرفته نمی‌شود. دقت این تئوری به نسبت تئوری مرتبه اول بیشتر است، اما از طرف دیگر حجم محاسبات آن نیز بیشتر است. این میدان جابجایی با فرضیاتی همراه است: (۱) جابجایی‌های طولی و عرضی به دو مولفه خمشی و برشی تقسیم می‌شوند.

بستر الاستیک است. با توجه به میدان جابجایی معرفی شده و تنش و کرنش استخراج شده در رابطه (۵)، انرژی کرنشی P به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dA dx$$

$$U = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2} A_s(x) \left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} A(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 - B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + D_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} D(x) \left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 - B_s(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} H_s(x) \left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (7)$$

انرژی جنبشی بصورت زیر معرفی می‌شود که با توجه به میدان جابجایی معرفی شده در معادله (۳) می‌توان انرژی جنبشی را بصورت رابطه (۸) استخراج کرد.

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) (U^2 + W^2) dA dx$$

$$K = \int_{-L/2}^{L/2} \left[J_2(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} - \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \mathcal{I}_2(x) \left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 - J_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} K_2(x) \left(\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0(x) \left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0(x) \left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_0(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (8)$$

طول خاک، مدول الاستیک و ضریب پواسون خاک وابسته هستند. با توجه به میدان جابجایی معرفی شده انرژی پتانسیل بستر نیز به فرم (۹) استخراج می‌شود.

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \left[k_w W^2 + k_g \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx$$

$$V_{ef} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} K_g \left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} \right)^2 + K_w w_b(x,t) w_s(x,t) + \frac{1}{2} K_w w_b(x,t)^2 + \frac{1}{2} K_g \left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_w w_s(x,t)^2 \right] dx \quad (9)$$

مکان، معادلات متشکله تیر مدرج تابعی دو جهته به فرم زیر استخراج می‌شود:

که در آن t پارامتر زمان است و t₁ و t₂ بترتیب زمان‌های اولیه و نهایی هستند؛ همچنین δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δV_{ef} تغییرات انرژی پتانسیل

انرژی جنبشی بصورت زیر معرفی می‌شود که با توجه به میدان جابجایی معرفی شده در معادله (۳) می‌توان انرژی

انرژی پتانسیل بستر الاستیک بصورت زیر معرفی می‌شود که در آن k_w و k_g به ترتیب ثابت‌های الاستیک وینکلر و لایه برشی بستر می‌باشند که به خصوصیات بستر و خاک، مانند

با جایگذاری معادلات (۷) - (۹) در معادله (۶) و انجام انتگرال‌گیری جز به جز با در نظر گرفتن متغیرهای زمان و

δu :

$$\begin{aligned}
 & A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - B(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \\
 & - B_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\
 & - \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} - J_1(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

δw_b :

$$\begin{aligned}
 & \left(K_g - \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - D(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial D(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - K_w w_b(x,t) + B(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \\
 & + \frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + 2 \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \left(K_g - \frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2} \right) \\
 & - D_s(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - K_w w_s(x,t) - \frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\
 & = \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial \mathcal{I}_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} - J_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathcal{I}_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

δw_s :

$$\begin{aligned}
 & K_2(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial K_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} + A_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A_s(x)}{\partial x} \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} + K_g \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} \\
 & - D_s(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 D_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} - K_w w_b(x,t) \\
 & + B_s(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + K_g \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\
 & - H_s(x) \frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial H_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 H_s(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - K_w w_s(x,t)
 \end{aligned}$$

$$= \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - J_2(x) \frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial J_2(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + J_1(x) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial J_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \mathcal{I}_0(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

همچنین شرایط مرزی به قرار ذیل استخراج می‌گردد:

$$u=0 \text{ or } -A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + B(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \text{ or } -D_s(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - H_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \text{ or } -D(x) \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

$$w_s = 0 \text{ or } J_2(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + K_2(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} - A_s(x) \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B_s(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - K_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - J_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - H_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial H_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

$$w_b = 0 \text{ or } \mathcal{I}_2(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + J_2(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} - K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D(x) \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial B(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - K_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - D_s(x) \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial D_s(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} - \mathcal{I}_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

۲-۵- گسسته‌سازی^۱ معادلات به فرم مربعات دیفرانسیلی در این مرحله معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه توسط روش مربعات دیفرانسیلی به فرم معادلات جبری تبدیل می‌شوند. با توجه به قوانین گسسته سازی، مشتقات و معادلات (۱۰) - (۱۲) و (۱۳) - (۱۷)، معادلات متشکله

برای آنالیز ارتعاشات آزاد تیر، روش حل زیر برای مولفه‌های جابجایی در نظر گرفته می‌شود [۱].

$$u(x,t) = \bar{u}(x)e^{i\omega t}, \\ w_b(x,t) = \bar{w}_b(x)e^{i\omega t}, \\ w_s(x,t) = \bar{w}_s(x)e^{i\omega t} \quad (18)$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ و w فرکانس طبیعی تیر است.

^۱ Discretizing

به فرم DQ و شرایط مرزی مربوطه به فرم نمونه رابطه (۲۰) چهار روش مربعات دیفرانسیلی می‌باشند؛ همچنین مشتق ثابت‌های تعریف شده به صورت (۱۹) تعریف می‌شود. ثابت‌های تعریف شده نیز به فرم ذیل آمده است.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{for } (\alpha = A, A_s, B, B_s, D, D_s, H_s, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, J_1, J_2, K_2) \\ (A(x), B, D, B_s, D_s, H_s) &= \int_{-b/2(x)}^{b/2(x)} \int_{-h/2(x)}^{h/2(x)} E(x, z)(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) da \\ (\mathcal{I}_0(x), \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, J_1, J_2, K_2) &= \int_{-b/2(x)}^{b/2(x)} \int_{-h/2(x)}^{h/2(x)} \rho(x, z)(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) da \end{aligned} \quad (19)$$

δu :

$$\begin{aligned} A_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{u}_j + \tilde{A}_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j - B_i \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{bj} - \tilde{B}_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} - B_{si} \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{sj} - \tilde{B}_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} \\ = \mathcal{I}_{0i} \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - J_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{B}_{si} \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j + H_{si} \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{sj} + \tilde{H}_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} \\ + K_g \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{w}_{sj} = J_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} \\ - J_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - K_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} w_b = 0 \quad \text{or} \quad K_g \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{w}_{bj} + D_i \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{bj} \\ + \tilde{D}_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} - B_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{u}_j - \tilde{B}_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j \\ + D_{si} \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{sj} + \tilde{D}_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} + K_g \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{w}_{sj} \\ = \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{d^2 u_j}{dt^2} - \mathcal{I}_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} \\ - J_{2i} \sum_{j=1}^N B_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \end{aligned} \quad (25)$$

برای تشکیل مقادیر ویژه سیستم معادلات، درجات آزادی به دو قسمت درجات آزادی دامنه و مرز (بانداری) به فرم (۲۶) تقسیم می‌شوند [۱].

همچنین با توجه به رابطه (۱۸) فرم DQ شرایط مرزی استخراج شده در معادلات (۱۳) - (۱۷) به فرم (۲۱) - (۲۵) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{or} \quad A_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j - B_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} \\ - B_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad B_{si} \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j - H_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} \\ - D_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad B_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{u}_j - D_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{sj} \\ - D_i \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} w_s = 0 \quad \text{or} \quad A_{si} \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{w}_{sj} + K_g \sum_{j=1}^N A_{ij} \bar{w}_{bj} \\ + D_{si} \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_{bj} + \tilde{D}_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{w}_{bj} - B_{si} \sum_{j=1}^N B_{ij} \bar{u}_j \end{aligned}$$

جدول ۱- خصوصیات تیر مدرج تابعی متشکل از Al-Al₂O₃ [۱]

خصوصیات ماده ۱ [۱]	فلز (Al)	سرامیک (Al ₂ O ₃)
E(GPa)	۷۰	۳۸۰
ν	۰/۳	۰/۳
ρ (kg/m ³)	۲۷۰۲	۳۹۶۰

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_0 I}, \quad K_g = \frac{k_0 L^2}{\pi^2 E_0 I} \quad (۳۱)$$

که پارامتر I به صورت (۳۲) تعریف می‌شود

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad h(x) = h_0(1 - \beta \frac{x}{l}), \quad b(x) = b_0(1 - \beta \frac{x}{l}) \quad (۳۲)$$

b, h و β به ترتیب پهنا، ارتفاع و نسبت باریک شونده‌گی تیر هستند.

در تمام حالت‌های بررسی شده رفتار همگرایی بر اساس تعداد نقاط روش مربعات دیفرانسیلی در راستای طول تیر بررسی شده‌اند؛ لکن بطور اختصار، حالت بدون بستر و تخلخل در شرایط مرزی مختلف نشان داده می‌شوند. در جدول ۲ به‌عنوان نمونه رفتار همگرایی فرکانس طبیعی تیر برای شرایط تکیه گاه گیردار نشان داده شده‌اند. در این جدول نشان داده شده که برای $N=29$ همگرایی جواب‌ها بدست آمده است.

ابتدا در جداول ۳ و ۴ فرکانس‌های بی بعد اول تیر دو جهته برای شرایط مرزی تکیه گاه گیردار CC و یک سر گیردار CF بر اساس تئوری مرتبه سوم ردی استخراج شده‌اند و با مرجع [۱۳] مقایسه گردیده است؛ آشکار است که بدلیل اختلاف مرتبه برشی مرجع و کارحاضر، نتایج دارای اختلاف هستند.

سپس در جدول ۵ فرکانس‌های اول و دوم تیر دو جهته به‌عنوان نمونه برای شرایط مرزی تکیه گاه گیردار و بر اساس تئوری مرتبه سوم ردی محاسبه شده‌اند و با مرجع [۴] مقایسه گردیده است؛ در این جدول بدلیل شباهت مرتبه برشی مرجع با کار حاضر، آشکار است که نتایج با دقت بالایی با هم تطابق دارد.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{w}_b\} \\ \{\bar{w}_s\} \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{w}_b\} \\ \{\bar{w}_s\} \end{Bmatrix} \quad (۲۶)$$

با استفاده از معادله (۲۶) فرم گسسته معادلات حرکت به‌حالت ماتریسی را به‌فرم معادله (۲۷) می‌توان نوشت [۱].

$$[S_{db}]\{b\} + [S_{dd}]\{d\} - w_i^2 [M]\{d\} = 0 \quad (۲۷)$$

که در آن ماتریس‌های سفتی هستند و [M] ماتریس جرم است. به‌همین ترتیب فرم گسسته شرایط مرزی به‌صورت (۲۸) بازنویسی می‌شود.

$$[S_{bb}]\{b\} + [S_{bd}]\{d\} = 0 \quad (۲۸)$$

که در آن $[S_{bb}], [S_{bd}]$ ماتریس‌های سفتی هستند. با بکار بردن معادله (۲۸) در معادله (۲۷)، ماتریس درجات آزادی حذف می‌شود و نتیجه به‌فرم (۲۹) استخراج می‌شود [۱].

$$([S] - w_i^2 [M])\{d\} = 0 \quad (۲۹)$$

که در آن $[S] = [S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]$ با حل کردن معادله (۲۹) فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی دو جهته بدست می‌آید.

۳- نتایج

در این بخش بمنظور استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی دو جهته غیر منشوری روی بستر الاستیک ابتدا رفتار همگرایی روش حل را مورد بررسی قرار داده و سپس برای مشخص کردن دقت جواب‌ها و صحت نتایج، مقایسه با مقالات دیگران را مد نظر قرار می‌گیرد. ابتدا از مدل نمایی با $E=210 \text{ Gpa}$ و $\rho=7850 \text{ Kg/m}^3$ اشاره شده در مرجع [۴] استفاده شده و سپس در مدل کسر حجمی توانی برای یک تیر مدرج تابعی متشکل از مشخصات جدول ۱ مرجع [۱] که شامل آلومینیوم (Al) و آلومینا (Al₂O₃) است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بررسی‌های این تحقیق فرکانس طبیعی بی بعد شده به‌صورت Λ_n و به‌فرم (۳۰) تعریف می‌شوند.

$$\Lambda_n = \frac{w_n L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (۳۰)$$

که ρ_m چگالی و E_m مدول الاستیسیته لایه فلز می‌باشند. همچنین ثابت‌های الاستیک بی بعد مربوط به بستر به فرم (۳۱) مشخص می‌شوند [۱].

جدول ۲- همگرایی سه فرکانس بی بعد برای شرایط مرزی تکیه گاهی گیردار و نسبت‌های طول به ضخامت مختلف

$$(K_w=K_g=0, p_x=0.2, p_z=0.6, \beta=0, e_0=0)$$

طول به ضخامت	فرکانس بی بعد	تعداد گره‌های دامنه X			
		۱۱	۲۵	۲۹	۳۱
۵	۱	۵/۲۳۱۴	۵/۱۹۷۰	۵/۱۹۶۵	۵/۱۹۶۵
	۲	۱۲/۵۶۱۳	۱۲/۴۵۰	۱۲/۴۵۰	۱۲/۴۴۹۹
	۳	۱۵/۷۱۵۹	۱۵/۷۱۵۹	۱۵/۷۱۵۹	۱۵/۷۱۵۹
۱۰	۱	۶/۰۳۱۰	۶/۰۱۳۶	۶/۰۱۳۲	۶/۰۱۳۲
	۲	۱۵/۷۴۹۸	۱۵/۶۸۴۷	۱۵/۶۸۳۱	۱۵/۶۸۳۰
	۳	۲۸/۲۷۶۸	۲۸/۰۱۱۵	۲۸/۰۰۳۵	۲۸/۰۰۳۲

جدول ۳- مقایسه فرکانس بی بعد پایه تیر مدرج تابعی دو جهته با شرایط مرزی گیردار CC با شاخص نمایی مختلف

$$(K_w=K_g=0, \beta=0, e_0=0)$$

فرکانس بی بعد	منبع	l/h=5			
		مرجع [۱۳]	Px	۰	۰/۶
فرکانس اول $\Delta 1$	مرجع EBT		۶/۳۲۹۱	۶/۲۷۶۳	۶/۱۸۲۶
	مرجع TBT	۰	۵/۱۹۴۳	۵/۱۶۳۰	۵/۱۰۸۳
	کار حاضر		۵/۲۳۲۳	۵/۱۹۷۰	۵/۱۳۵۳
	مرجع EBT		۶/۳۳۱۰	۶/۲۷۶۳	۶/۱۸۲۶
	مرجع TBT	۰/۲	۵/۱۹۶۲	۵/۱۶۵۰	۵/۱۰۸۳
	کار حاضر		۵/۲۳۴۰	۵/۱۹۸۳	۵/۱۳۶۳
	مرجع EBT		۶/۳۴۲۷	۶/۲۸۸۰	۶/۱۹۴۳
	مرجع TBT	۰/۶	۵/۲۰۴۱	۵/۱۷۲۸	۵/۱۱۸۱
	کار حاضر		۵/۲۴۲۵	۵/۲۰۶۸	۵/۱۴۴۷
	مرجع EBT		۶/۳۶۶۲	۶/۳۱۱۵	۶/۲۱۷۷
	مرجع TBT	۱	۵/۲۱۹۷	۵/۱۸۸۴	۵/۱۳۳۷
	کار حاضر		۵/۲۵۹۰	۵/۲۲۳۷	۵/۱۶۱۶

جدول ۴- مقایسه فرکانس بی بعد پایه تیر مدرج تابعی دو جهته با شرایط مرزی یک سر گیردار CF با شاخص نمایی مختلف
($K_w=K_g=0, \beta=0, e_0=0$)

فرکانس بی بعد	منبع	l/h=5			
		P_x	۰	۰/۶	۱
Λ_n	مرجع [۱۳]				
فرکانس اول Λ_1	مرجع EBT		۱/۰۰۶۸	۰/۹۹۹۰	۰/۹۸۳۳
	مرجع TBT	۰	۰/۹۸۴۴	۰/۹۷۳۵	۰/۹۵۷۶
	کار حاضر		۱/۰۰۱۳	۰/۹۹۲۵	۰/۹۷۷۲
	مرجع EBT		۰/۹۴۸۲	۰/۹۳۸۴	۰/۹۲۴۸
	مرجع TBT	۰/۲	۰/۹۲۷۱	۰/۹۱۷۳	۰/۹۰۱۳
	کار حاضر		۰/۹۴۳۰	۰/۹۳۴۳	۰/۹۱۹۷
	مرجع EBT		۰/۸۳۶۹	۰/۸۲۹۱	۰/۸۱۵۴
	مرجع TBT	۰/۶	۰/۸۱۹۳	۰/۸۱۱۵	۰/۷۹۷۸
	کار حاضر		۰/۸۳۴۴	۰/۸۲۸۷	۰/۸۱۴۰
	مرجع EBT		۰/۷۳۵۳	۰/۷۲۹۴	۰/۷۱۷۷
	مرجع TBT	۱	۰/۷۲۱۶	۰/۷۱۳۸	۰/۷۰۲۱
	کار حاضر		۰/۷۳۶۱	۰/۷۲۸۳	۰/۷۱۷۱

جدول ۵- مقایسه فرکانس های بی بعد اول و دوم تیر مدرج تابعی دو جهته با شرایط مرزی گیردار با شاخص نمایی مختلف
($K_w=K_g=0, \beta=0, e_0=0$)

فرکانس بی بعد	منبع	l/h=5			
		P_x	۰	۰/۶	۱
Λ_n	-				
فرکانس اول Λ_1	مرجع [۴]		۵/۲۳۳۰	۵/۱۹۷۴	۵/۱۳۵۴
	کار حاضر	۰	۵/۲۳۲۳	۵/۱۹۷۰	۵/۱۳۵۳
	درصد اختلاف		۰/۰۱۳	۰/۰۰۷	۰/۰۰۱
	مرجع [۴]		۵/۲۳۴۱	۵/۱۹۸۴	۵/۱۳۶۴
	کار حاضر	۰/۲	۵/۲۳۴۰	۵/۱۹۸۳	۵/۱۳۶۳
	درصد اختلاف		۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲

	مرجع [۴]	۵/۲۴۲۶	۵/۲۰۶۹	۵/۱۴۴۸
	کار حاضر	۰/۶	۵/۲۴۲۵	۵/۱۴۴۷
	درصد اختلاف	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲
	مرجع [۴]	۵/۲۵۹۷	۵/۲۲۳۹	۵/۱۶۱۷
	کار حاضر	۱	۵/۲۵۹۰	۵/۱۶۱۶
	درصد اختلاف	۰/۰۱۳	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۲
	مرجع [۴]	۱۲/۰۸۴	۱۲/۰۱۸۲	۱۱/۹۰۱۸
	کار حاضر	۰	۱۲/۰۸۳	۱۱/۹۰۱۸
	درصد اختلاف	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۰۸	۰
	مرجع [۴]	۱۲/۰۸۶	۱۲/۰۱۹۵	۱۱/۹۰۳۱
	کار حاضر	۰/۲	۱۲/۰۸۶	۱۱/۹۰۲۹
	درصد اختلاف	۰	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۶
فرکانس دوم ۸۲	مرجع [۴]	۱۲/۰۹۶	۱۲/۰۳۰۱	۱۱/۹۱۳۵
	کار حاضر	۰/۶	۱۲/۰۹۶	۱۱/۹۱۳۱
	درصد اختلاف	۰	۰	۰/۰۰۳۳
	مرجع [۴]	۱۲/۱۱۸	۱۲/۰۵۱۲	۱۱/۹۳۴۴
	کار حاضر	۱	۱۲/۱۱۸	۱۱/۹۳۴۱
	درصد اختلاف	۰	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۲۵

فرکانس‌های استخراج شده این نظریه بزرگتر از نظریه ردی است.

در جدول ۷ مقادیر فرکانس طبیعی اول بی بعد برای تیر مدرج بدون تخلخل با مقطع باریک شونده و با پارامترهای توانی مختلف در دو جهت در شرایط مرزی مختلف بدست آمده و با مرجع [۱۶] مقایسه گردیده است. همانطور که اشاره شد، تفاوت در جواب‌ها بدلیل استفاده از نظریه مرتبه سه ردی در کار حاضر است که در تیرهای ضخیم تر نتایج را با دقت بالاتری نشان می‌دهد.

در جدول ۸ اثرات نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و پارامترهای بستر الاستیک در نظر گرفته شده‌اند. نتایج برای تیر ایزوتروپیک روی بستر الاستیک استخراج گردیده و با [۱] مقایسه شده‌اند که تطابق کامل در جواب‌ها مشاهده می‌شود.

در جدول ۶ مقادیر فرکانس طبیعی اول بی بعد به دست آمده از این روش برای تیر دوجهته دارای تخلخل با شاخص‌های توانی دوجهته مختلف برای شرایط مرزی دو سر گیردار استخراج شده و با مرجع [۱۸] مقایسه شده‌اند. در این جدول تفاوت مشاهده شده در جواب‌ها به دلیل این است که در تئوری مرتبه سه مشکل اثرات یکسان بودن کرنش برشی در راستای ضخامت تیر تیموشنکو مرتفع گشته و به سبب درجه دو بودن کرنش برشی نسبت به ضخامت، انعطاف پذیری تیر در نظریه ردی دقیق تر نشان داده می‌شود؛ به همین دلیل فرکانس‌های بدست آمده نسبت به نظریه تیموشنکو کوچکتر است. در نظریه تیموشنکو در تعیین کرنش برشی تیر از فاکتور تصحیح برش استفاده می‌شود که سفیدی تیر را بیش از حد واقعی نشان می‌دهد؛ در نتیجه

جدول ۶- مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر با ضریب تخلخل ۰/۱ دو جهته مدرج تابعی دارای شرط مرزی گیردار با شاخص توانی مختلف (Kw=Kg=0, β=0, eo=0.1)

منبع			l/h=18 eo=0.1 Pz	
-	Px	۰	۱	۵
TBT مرجع [۱۸]		۲۲/۸۷۴۹	۱۵/۶۷۷۲	۱۳/۱۹۵۲
کار حاضر	۰	۲۲/۸۴۳۶	۱۵/۳۷۹۳	۱۲/۶۷۱۰
درصد اختلاف		۰/۱۳	۲/۵	۳/۹۷
TBT مرجع [۱۸]		۱۵/۵۹۹۲	۱۳/۴۲۷۶	۱۲/۳۹۴۵
کار حاضر	۱	۱۵/۲۰۰۸	۱۲/۸۷۹۵	۱۱/۷۹۴۷
درصد اختلاف		۲/۵۵	۴/۰۸	۴/۸۳
TBT مرجع [۱۸]		۱۲/۵۹۱۹	۱۲/۱۱۸۶	۱۱/۸۸۶۸
کار حاضر	۵	۱۲/۰۵۹۰	۱۱/۵۱۲۱	۱۱/۲۴۸۳
درصد اختلاف		۴/۲۳	۵	۵/۳۷

جدول ۷- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی بعد اول تیر بدون تخلخل مدرج تابعی توانی با شرایط مرزی مختلف و ضریب باریک شوندهگی ۰/۱ (Kw=Kg=0, β= 0.1, eo=0)

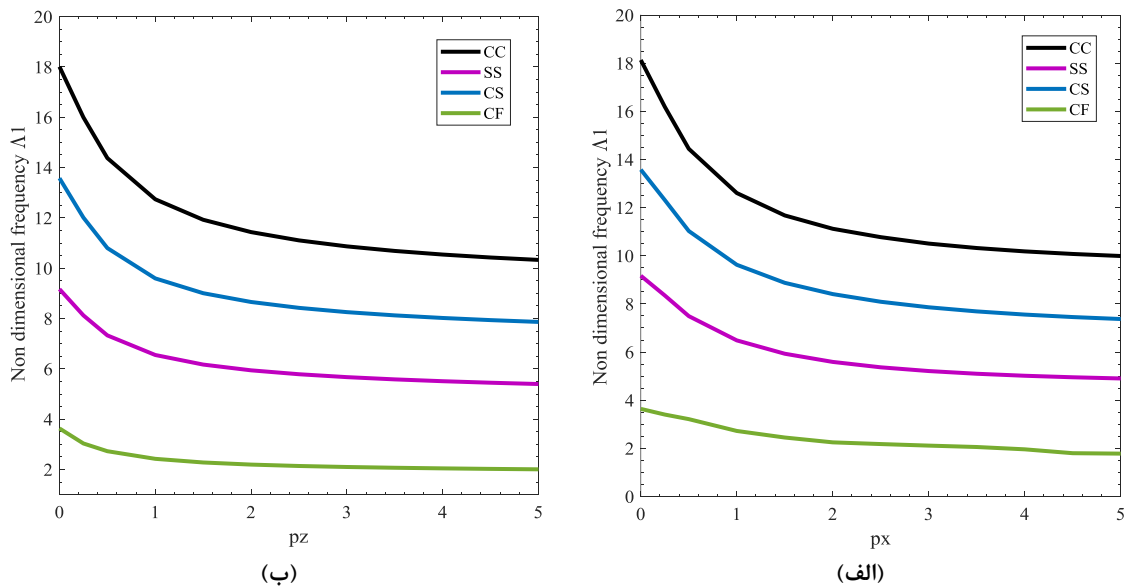
منبع				l/h=2.887 β=0.1 Pz=0	
-	Px	CC	CS	CF	SS
TBT [۱۶]		۱۲/۶۸۰	۱۰/۸۸۳	۳/۹۴۴	۷/۵۰۸
کار حاضر	۱	۱۲/۶۵۴	۱۰/۲۵۵	۳/۱۹۹	۷/۶۵۳
درصد اختلاف		۰/۲	۵/۷۷	۱۸	۱/۹۳
TBT [۱۶]		۱۲/۴۶۲	۱۰/۷۹۹	۳/۹۳۵	۷/۶۵۲
کار حاضر	۲	۱۲/۳۱۵	۱۰/۲۵۰	۳/۱۹۲	۷/۳۰۶
درصد اختلاف		۱/۱۷	۵	۱۸	۴/۵۲
TBT [۱۶]		۱۲/۳۶۰	۱۰/۷۱۴	۳/۷۷۱	۷/۷۸۸
کار حاضر	۴	۱۱/۸۳۷	۱۰/۲۴۵	۳/۶۶۷	۷/۲۲۵
درصد اختلاف		۴/۲۳	۴/۳۷	۲/۷۵	۷

جدول ۸- مقایسه فرکانس‌های بی بعد اول تیر ایزوتروپیک با شرایط مرزی ساده تحت اثر ثابت‌های مختلف بستر الاستیک ($\beta = 0, e_0 = 0$)

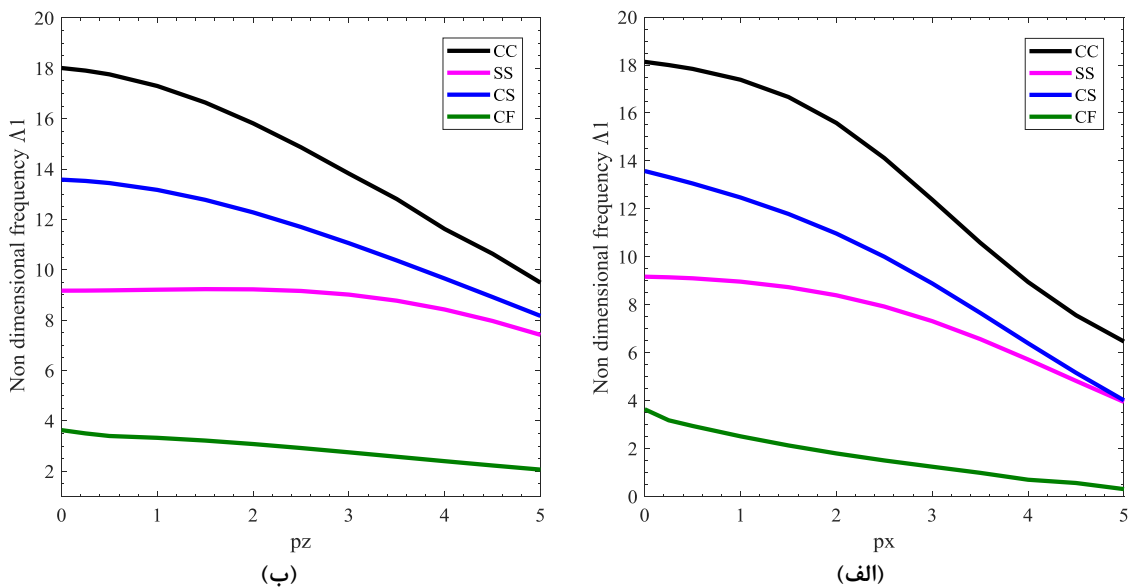
l/h	منبع	Kg		
		-	Kw	.
۵	مرجع [۱]		۹/۲۷۴	۱۳/۴۴۷
	کار حاضر	.	۹/۲۷۴	۱۳/۴۴۷
	درصد اختلاف		.	.
	مرجع [۱]		۹/۷۸۵	۱۳/۸۰۴
	کار حاضر	۱۰	۹/۷۸۵	۱۳/۸۰۴
	درصد اختلاف		.	.
	مرجع [۱]		۳۲/۵۳۷	۳۳/۹۶۰
	کار حاضر	۱۰۰۰	۳۲/۵۳۷	۳۳/۹۶۱
	درصد اختلاف		.	.
۱۰	مرجع [۱]		۹/۷۰۷	۱۳/۸۱۶
	کار حاضر	.	۹/۷۰۷	۱۳/۸۱۶
	درصد اختلاف		.	.
	مرجع [۱]		۱۰/۲۰۵	۱۴/۱۷۰
	کار حاضر	۱۰	۱۰/۲۰۵	۱۴/۱۷۰
	درصد اختلاف		.	.
	مرجع [۱]		۳۲/۹۶۱	۳۴/۳۹۶
	کار حاضر	۱۰۰۰	۳۲/۹۶۱	۳۴/۳۹۶
	درصد اختلاف		.	.

حالت ساده به دو سر گیر دار سفتی تیر افزایش یافته و در نتیجه فرکانس بی بعد افزایش می‌یابد. تفاوت افت فرکانس‌های مدل نمایی و توانی نیز از مقایسه شکل‌های ۳ و ۲ قابل رویت است. این تفاوت بدلیل اختلاف تغییرات خواص مواد با افزایش گرادیان خواص مواد در دو مدل است؛ بطوری‌که با افزایش گرادیان مواد در دو جهت، سرعت تغییرات خواص مواد در مدل نمایی بیشتر بوده و کاهش سفتی تیر شدیدتر اتفاق افتاده و نتیجتاً کاهش فرکانس بی بعد در مدل نمایی شدیدتر است.

در ادامه به منظور بررسی بیشتر، فرکانس بی بعد اول برای نسبت طول به ضخامت ۵، در اشکال ۲ و ۳ آورده شده‌اند. در شکل ۲ و شکل ۳-الف، تاثیر شاخص توانی ماده در راستای طول px و در شکل ۲ و شکل ۳-ب، تاثیر گرادیان خواص ماده در راستای ضخامت pz روی فرکانس بی بعد تیر با ضریب تخلخل ۰/۱ برای شرایط مرزی مختلف و دو مدل تیر توانی و نمایی نشان داده شده‌اند. که در آنها با افزایش px و pz بدلیل کاهش سفتی تیر، فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می‌یابد؛ همچنین ملاحظه می‌شود با تغییر شرایط مرزی از



شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر مدل توانی با $l/h=5$ و ضریب تخلخل $\epsilon_0=0.1$ (الف) تاثیر px و (ب) تاثیر pz



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر مدل نمایی با $l/h=5$ و ضریب تخلخل $\epsilon_0=0.1$ (الف) تاثیر px و (ب) تاثیر pz

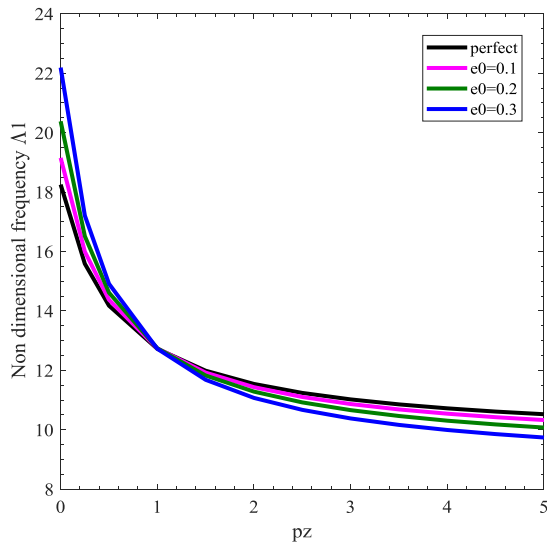
کاهش می‌یابد؛ همچنین ملاحظه می‌شود، زمانی که گرادیان مختلف و گرادیان خواص ماده در راستای طول px و ضخامت pz بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر برای شرایط مرزی دو سرگیر دار نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب تخلخل و گرادیان ماده در دو جهت، فرکانس بی بعد بدلیل کاهش سفتی تیر، بشدت

کاهش می‌یابد؛ همچنین ملاحظه می‌شود، زمانی که گرادیان مختلف و گرادیان خواص ماده در راستای طول px و ضخامت pz بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر برای شرایط مرزی دو سرگیر دار نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب تخلخل و گرادیان ماده در دو جهت، فرکانس بی بعد بدلیل کاهش سفتی تیر، بشدت

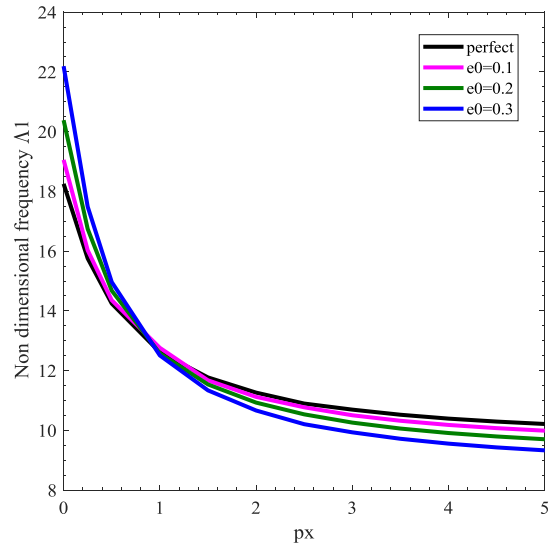
در دو جهت فرکانس بی بعد بدلیل کاهش سفتی تیر، کاهش می‌یابد.

در شکل ۶-الف و ۶-ب اثرات ضریب باریک شونده بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر برای شرایط مرزی مختلف و در حالت $p_x=1$ و ضخامت $p_z=1$ استخراج شده است. همانطور

در شکل ۵ الف و ۵-ب اثرات ضریب باریک شونده بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر برای شرایط ضخامت p_z بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر برای شرایط مرزی گیر دار نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب باریک شونده و گرادینان ماده

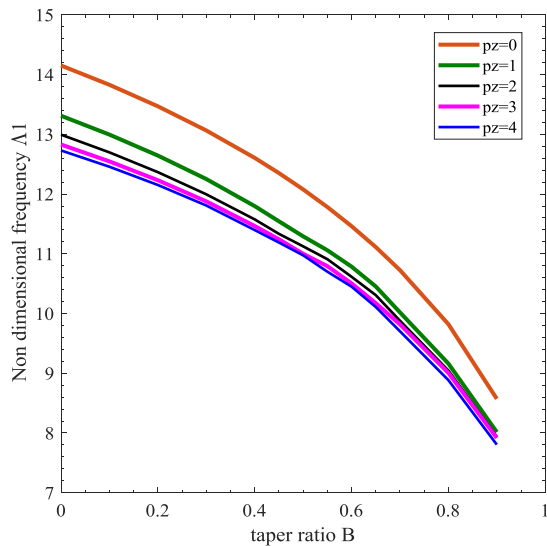


(ب)

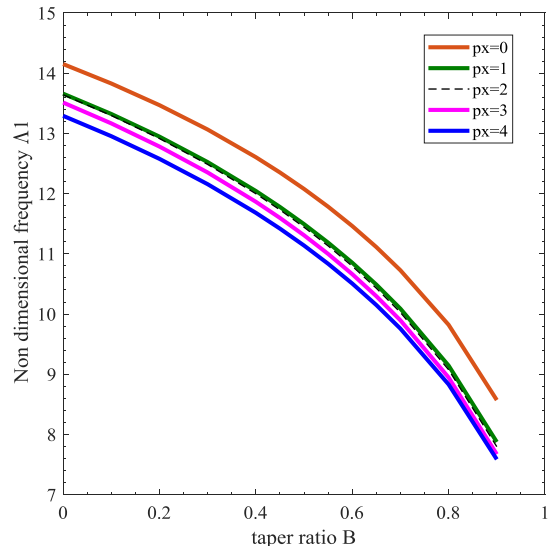


(الف)

شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر با $l/h=5$ و ضرایب تخلخل مختلف (الف) تاثیر p_x (ب) تاثیر p_z



(ب)

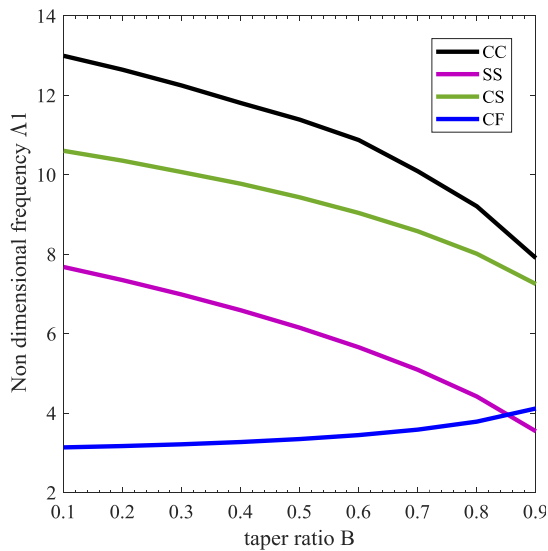


(الف)

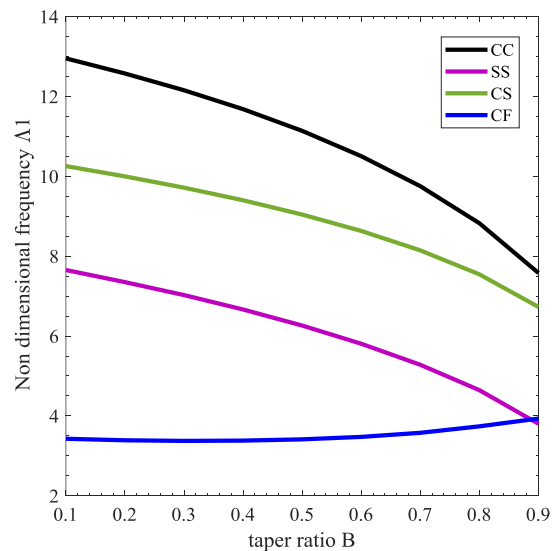
شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر با $l/h=2/88$ و ضرایب باریک شونده مختلف؛ (الف) تاثیر p_x و (ب) تاثیر p_z

در شکل ۷-الف و ۷-ب نمودار تغییرات اولین فرکانس بی بعد بر حسب ضریب لایه برشی برای مقادیر مختلف ضرائب وینکلر و ضریب لایه وینکلر به‌ازای مقادیر مختلف ضریب لایه برشی در شرایط تکیه گاهی ساده مشاهده می‌شود. با مقایسه این دو نمودار مشاهده می‌شود با افزایش

که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب باریک شونده‌گی، فرکانس بی بعد بدلیل کاهش سفتی تیر در تمام شرایط مرزی بااستثنای شرط مرزی یکسر گیردار CF، کاهش می‌یابد. درحالت یکسر گیردار بدلیل افزایش خیز تیر در سر آزاد، فرکانس بی بعد افزایش می‌یابد.

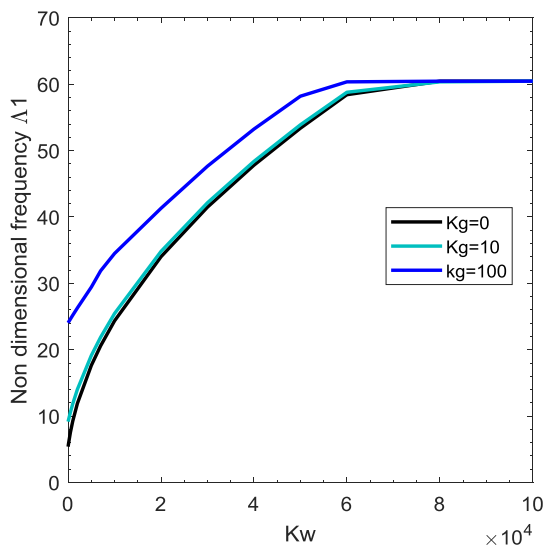


(ب)

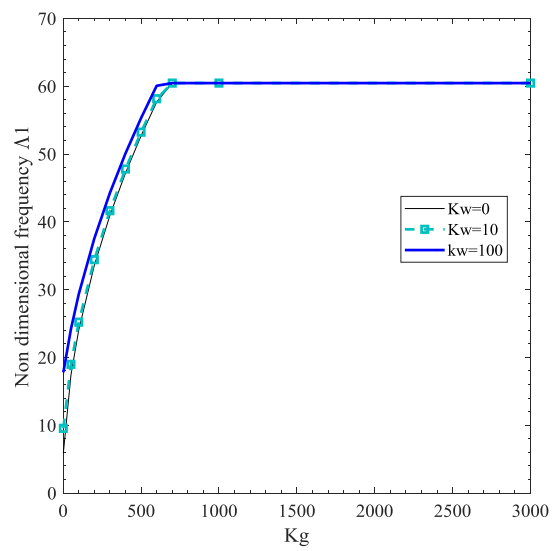


(الف)

شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر با $l/h = 2/88$ و ضرائب باریک شونده‌گی با شرایط مرزی مختلف؛ (الف) $p_x = 1$ و (ب) $p_z = 1$



(ب)

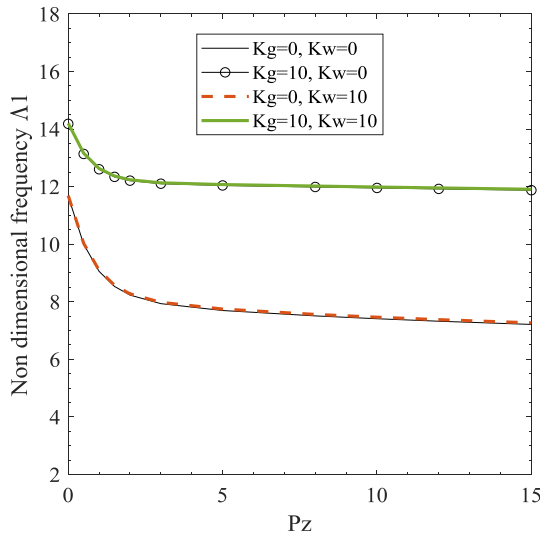


(الف)

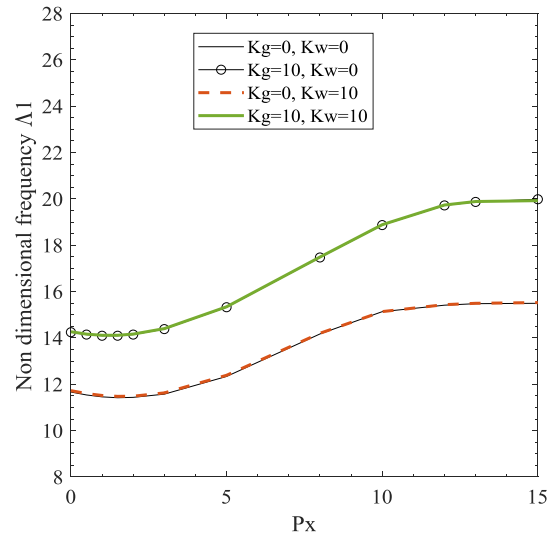
شکل ۷- تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی بعد تیر همگن $l/h = 10$ با شرایط مرزی ساده؛ (الف) بر حسب kg و (ب) بر حسب kw

در اشکال ۸، ۹-الف و ۹-ب تغییرات اولین فرکانس طبیعی بی بعد تیر برحسب گرادیان خواص، شاخص توانی و نمایی ماده در راستای طول P_x و ضخامت P_z برای مقادیر مختلف ضرائب بستر نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش P_x فرکانس بی بعد اول افزایش

محدود مقدار ضریب لایه برشی k_g ، فرکانس بی بعد سریع به حد نهایی خود می‌رسد. در حالیکه این امر با افزایش زیاد در مقدار ضریب لایه وینکلر k_w میسر می‌شود؛ بنابراین تاثیر بیشتر ضریب لایه برشی نسبت به ضریب لایه وینکلر در رسیدن فرکانس به مقدار معین مشخص است.

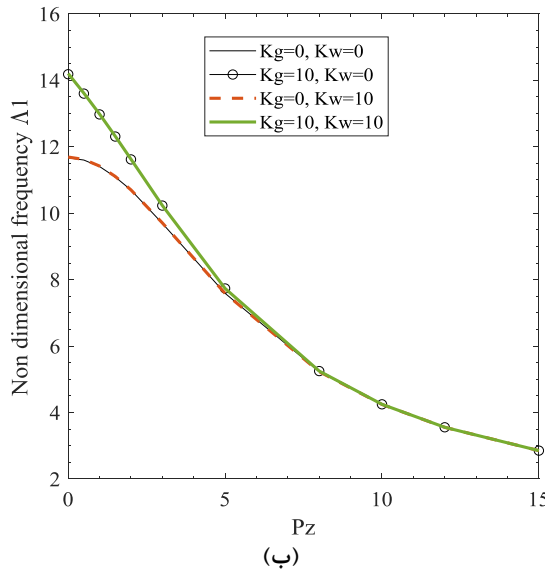


(ب)

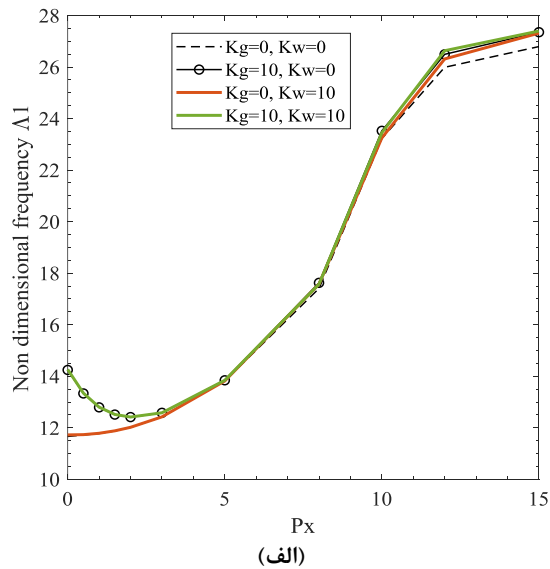


(الف)

شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر دو سرگیر دار مدل توانی با $l/h=10$ برای مقادیر مختلف ضرائب بستر
الف) تاثیر P_x و ب) تاثیر P_z



(ب)



(الف)

شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول تیر دو سرگیر دار مدل نمایی با $l/h=10$ برای مقادیر مختلف ضرائب بستر
الف) تاثیر P_x و ب) تاثیر P_z

فرکانس‌های طبیعی تیر در اغلب شرایط مرزی می‌شود و افزایش همزمان در ضریب تخلخل و گرادیان ماده در دو جهت، سبب کاهش شدید در فرکانس‌های بی بعد می‌شود؛ بنابراین با استفاده از خروجی‌های این پژوهش در طراحی بهینه تیرهای مدرج تابعی دو جهته ضخیم با انتخاب مناسب نوع مدل، شرایط مرزی، ضرایب بستر پایه، ضریب تخلخل، تغییر سطح مقطع، نسبت لاغری و شاخص‌های گردیان مواد می‌توان فرکانس طبیعی ارتعاش را کنترل کرد.

۵- مراجع

- [1] Zahedinejad P (2016) Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment. *Int J Str Stab and Dyn* 16(7): 1550029-51.
- [2] Li SR, Wan ZQ, Zhang JH (2014) Free vibration of functionally graded beams based on both classical and first-order shear deformation beam theories. *App Math and Mech* 35(5): 591-606.
- [3] Ziou H, Guenfoud H, Guenfoud M (2016) Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *Int J Str Eng* 7(3): 239-6.
- [4] Karamanli A (2018) Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. *Comp Str* 189: 127-36.
- [۵] ابراهیمی ممقانی ع، حسینی ر، شاهقلی م، سرپرست هـ (۱۳۹۷) تحلیل ارتعاشات عرضی آزاد تیرهای ناهمگن محوری نمایی با شرایط مرزی مختلف. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۱۳۳-۱۲۵: (۳)۸.
- [6] Eisenberger M (1994) Vibration frequencies for beams on variable one-and two-parameter elastic foundations. *J Sound Vib* 176(5): 577-84.
- [7] Catal S (2008) Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method. *App Math Mod* 32(9): 1744-57.
- [8] Malekzadeh P, Karami G (2008) A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations. *App Math Mod* 32(7): 1381-94.
- [۹] محمدی مهر م، قربانپور ع، روستاناوی ب (۱۳۹۴) تحلیل ارتعاشات آزاد پانل استوانه ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی قرار گرفته بر روی بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۱۶۳-۱۴۹: (۱)۵.

یافته و با افزایش pz کاهش می‌یابد. این امر دلالت بر افزایش سفتی تیر در جهت طولی و کاهش آن در جهت عرضی تیر، هم در مدل توانی و هم در مدل نمایی دارد. با این حال ملاحظه می‌شود، بدلیل سرعت تغییرات خواص ماده در مدل نمایی که باعث افزایش و کاهش سریع تر سفتی تیر به ترتیب در جهت x و z می‌شود، دامنه تغییرات فرکانس بیشتر از مدل توانی است.

بنابراین در مواردی که نیاز به جذب سریع فرکانس ارتعاشی و کاهش سریع ارتعاش در جهتی خاص و عدم صدمه به سیستم ارتعاشی باشد، انتخاب نوع بستر و نوع مدل مدرج تابعی مطابق آنچه بررسی شد، بسیار کاربردی و حائز اهمیت است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی ردی، اصل همپلتن و روش حل مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی مقطع متغیر دو جهته روی بستر الاستیک دو پارامتری با شرایط مرزی مختلف و دارای تخلخل برای دو مدل نمایی و توانی مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا معادلات گسسته سازی شده حرکتی تیر و شرایط مرزی مربوطه استخراج گردید. همگرایی روش حل، آزمایش شد و دقت جواب‌ها در مقایسه با سایر نتایج مقالات موجود، مورد ارزیابی قرار گرفت. اثرات پارامترهای هندسی، خصوصیات ماده، ثابت‌های بستر الاستیک، تخلخل و شرایط مرزی برای تیر مدرج تابعی دو جهته مورد ارزیابی قرار گرفت. مشاهده شد که فرکانس طبیعی بی بعد تیر دو جهته روی بستر الاستیک با افزایش شاخص گرادیان خواص ماده در راستای طول px ، افزایش می‌یابد که دلالت بر افزایش سفتی تیر در این جهت است و با افزایش شاخص گرادیان خواص ماده در راستای ضخامت pz ، کاهش می‌یابد که دلالت بر کاهش سختی تیر در این راستا دارد. با افزایش مقدار ثابت‌های بستر الاستیک فرکانس طبیعی بی بعد تیر بویژه در مدل نمایی افزایش می‌یابد که تاثیر ضریب لایه برشی نسبت به ضریب لایه وینکلر، در افزایش فرکانس بیشتر است؛ همچنین با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس‌های طبیعی بی بعد تیر دو جهته افزایش یافته و افزایش ضریب باریک شونده سطح مقطع تیر، منجر به کاهش

- [19] Chen D, Yang J, Kitipornchai S (2016) Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *Int J of Mech Sci* 108: 14-22.
- [20] Fouda N, El-Midany T, Sadoun AM (2017) Bending, buckling and vibration of a functionally graded porous beam using finite elements. *J App and Comp Mech* 3(4): 74-82.
- [21] Şimşek M (2010) Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuc Eng Desg* 240(4): 697-705.
- [22] Pradhan KK, Chakraverty S (2013) Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method. *Comp Part B: Eng* 51: 175-184.
- [۲۳] رحیمی ع ر، لیوانی م، نگهبان برون ع (۱۴۰۰) تحلیل ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی با وجود ترک عرضی. *مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک تبریز* ۵۱(۱): ۲۷۷-۲۸۱
- [24] Ghorbanpour Arani, Niknejad S (2020) Dynamic Stability Analysis of Bi-Directional Functionally Graded Beam with Various Shear Deformation Theories under Harmonic Excitation and Thermal Environment. *J of Solid Mech*.
- [25] Lei J, He Y, Li Z, Guo S, & Liu D (2019) Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory. *Comp Str* 209: 811-829.
- [26] Bert CW, Malik M (1996) Differential quadrature method in computational mechanics. a review. *App Mech Rev* 49(1): 1-28.
- [10] Akbas SD (2015) Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation. *Research on Eng Str Mat* 1(1): 25-37.
- [11] Wang ZH, Wang XH, Xu GD, Cheng S, Zeng T (2016) Free vibration of two-directional functionally graded beams. *Comp Str* 135: 191-198.
- [۱۲] ترشیزیان مر، اخوت پور ع ح (۱۳۹۴) تحلیل ارتعاشات تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد تابعی دو بعدی. *فصلنامه علمی پژوهشی دانشگاه آزاد مشهد* ۹۰-۱۰۰: ۸.
- [13] Şimşek, M (2015) Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Comp Str* 133: 968-978.
- [14] Abrate S (1995) Vibration of non-uniform rods and beams. *J sound vib* 185(4): 703-16.
- [15] Shahba A, Attarnejad R, Marvi MT, Hajilar S (2011) Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Comp Part B: Eng* 42(4): 801-808.
- [16] Calim FF (2016) Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section. *Comp Part B: Eng* 98: 472-483.
- [۱۷] رحمانی ب، نغمه سنج م، حسینی م (۱۳۹۵) کنترل بهینه ارتعاشات عرضی تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر. *مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک تبریز* ۱۲۲-۱۱۳: ۴۶(۴).
- [18] Shafiei N, Kazemi M (2017) Buckling analysis on the bi-dimensional functionally graded porous tapered nano beams. *Aerspace Sci Tech* 66: 1-11.