



## بررسی کارایی جاذب ارتعاش ساخته شده از تیر سه لایه با هسته ویسکوالاستیک

توحید واحدی اصل<sup>۱</sup> و سعید محمودخانی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده فناوری‌های نوین و مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین و مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۳

### چکیده

در این مطالعه، به بررسی عمل کرد جاذب ساخته شده از تیر خمیده ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک به همراه جرم صلب پرداخته شده است. برای این منظور سازه اصلی به شکل جرم و فنر در نظر گرفته شده و تیر سه لایه به روش لایه به لایه مدل سازی شد. برای این کار، لایه‌های بالا و پائین با استفاده از نظریه اویلر-برنولی مدل سازی شده و در مدل سازی هسته از نظریه مرتبه بالای برشی استفاده شد؛ همچنین علاوه بر اندازه جرم صلب الحاقی، اثر فاصله مرکز جرم آن از تیر نیز در محاسبات در نظر گرفته شد. در بررسی رفتار ماده ویسکوالاستیک از روش مدول مختلط استفاده شده و وابستگی مدول به فرکانس و دما در نظر گرفته شد. برای حل مسأله نیز روش المان محدود و المان‌های یک بعدی سه گرهی با ترکیبی از توابع شکل لاگرانژی و هرمیتی برای دستیابی به پاسخ دقیق به کار گرفته شد. بررسی عددی تاثیر تغییرات هندسه تیر، جرم و مکان مرکز جرم صلب در کاهش دامنه ارتعاشات هارمونیک سازه اصلی ارائه صورت گرفته و از روی آن خواص، طرح جاذب با عملکرد کارآمد ارائه شده است؛ همچنین صلابت جاذب طراحی شده تحت اثر تغییرات دما بررسی شده و بازه تغییرات دمایی قابل قبول برای استفاده از جاذب تعیین شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد، جاذب ارائه شده نقش به سزایی در کاهش دامنه پاسخ فرکانسی سازه اصلی داشته و تغییرات دمایی در حدود ۲۰ درجه سلسیوس اثری در کاهش کارایی آن ندارد.

**کلمات کلیدی:** جاذب ارتعاشی؛ تیر ساندویچی؛ هسته ویسکوالاستیک؛ جرم صلب

## Investigating the Performance of the Vibration Absorber Made of a Three-Layer Beam with a Viscoelastic Core

T. Vahedi Asl<sup>1</sup>, S. Mahmoudkhani<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> MSC, New Technologies and Aerospace Eng., Shahid Beheshti Univ., Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assistant. Prof., New Technologies and Aerospace Eng., Shahid Beheshti Univ., Tehran, Iran.

### Abstract

In this study the performance of a dynamic vibration absorber made of a curved sandwich beam with a viscoelastic core and an attached rigid mass is investigated. For this purpose the primary structure is modeled as a mass-spring and the sandwich beam is modeled using layerwise-based methods. This is done by using the Euler-Bernoulli beam theory for the top and bottom layers and using higher-order shear theory for the core. The constitutive behavior of the viscoelastic material is also described by the complex modulus approach where the dependence of the modulus to frequency and temperature is also accounted for. The solution is provided by using the finite element method with three-node line element and using a combination of Lagrangian and Hermitian shape functions. Numerical studies include investigating the effects of the beam geometric parameters, the mass and gravity center of the rigid mass on the maximum response amplitude, which is used to design an absorber with better performances. Also, the robustness of the method under the effect of thermal variations is assessed and an acceptable range of thermal variation for using the absorber is obtained. It is found that the absorber could significantly reduce the resonance vibration and changes of about 20 °C in environment temperature would not deteriorate its performance.

**Keywords:** Sandwich Beam; Viscoelastic Core; Rigid Mass;

## ۱- مقدمه

عملکرد دینامیکی سازه‌ها در شرایط متنوع کاری از جمله مواردی است که باید در طراحی سازه‌های مهندسی مورد توجه قرار گیرد. از جمله موارد مهم در این ارتباط، کنترل ارتعاشات ناخواسته سازه‌هایی چون پل‌ها، برج‌های بلند، ماشین‌ها و اجزاء به‌کار رفته در صنعت هوافضا است. این سازه‌ها در صورت تحمل ارتعاشات با دامنه زیاد و به مدت طولانی ممکن است، دچار فروپاشی آنی و یا خرابی ناشی از خستگی (کاهش عمر) شوند. پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه کنترل و کاهش این دسته از ارتعاشات انجام شده است و تحقیقات صورت‌گرفته با این فرض که نتوان ارتعاشات را در منبع کاهش داد، منجر به تقسیم‌بندی روش‌های کنترل ارتعاشات ناخواسته در سه گروه عمده مبتنی بر فن‌آوری فعال، نیمه‌فعال و غیرفعال شده است. فن‌آوری‌های فعال و نیمه‌فعال به علت نیاز به استفاده از حسگرها، عملگرهای الکترونیکی و منابع تغذیه، هزینه‌بر بوده، اما روش غیرفعال با توجه به سادگی، اثربخشی و عدم نیاز به منبع اضافه، گزینه‌ای مفید و کم‌هزینه برای کنترل ارتعاشات در کاربردهای مهندسی به‌شمار می‌رود. روش‌های غیرفعال شامل افزایش میرایی سازه از طریق گنجاندن مواد با میرایی بالا در ساختار سازه در حین ساخت، استفاده از ایزولاتورهای ارتعاشی بین منبع ارتعاش و سازه اصلی یا بکارگیری جاذب‌های دینامیکی ارتعاشات و انتقال انرژی جنبشی سازه‌ی اصلی به آن است. با توجه به افزایش هزینه در روش افزایش میرایی و عمر کوتاه ایزولاتورهای ارتعاشی، استفاده از جاذب‌های دینامیکی ارتعاشات از کاراترین روش-ها به‌شمار رفته و به‌علت سادگی ساخت و ارزان بودن آن، در انواع صنایع مهندسی همانند صنایع ساختمانی و هوافضایی به‌وفور مورد استفاده قرار گرفته است. جاذب دینامیکی ارتعاشی فاقد میراگر که از آن به‌عنوان جاذب ارتعاشی تنظیم‌شونده نام برده می‌شود، بهترین اثر خنثی-کنندگی را برای یک فرکانس طراحی خاص و غالب دارد. به‌عبارتی اگر فرکانس تحریک ثابت بماند، بسیار موثر است، اما در صورت گستردگی بازه فرکانسی و تغییر فرکانس تحریک یا تغییر فرکانس طبیعی جاذب به‌دلیل عوامل محیطی مانند دما و غیره، کارایی به‌مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد. برای غلبه بر این مشکل، از روش‌های

متفاوتی مانند اضافه کردن میراگر، بهره‌گیری از رفتار غیر خطی ایجاد امکان تطبیق جاذب با شرایط محیطی که تحت عنوان جاذب‌های تطبیقی مطرح شده‌اند و یا از جاذب با بیش از یک درجه آزادی استفاده کرد. از جمله کارهای انجام شده در این زمینه می‌توان به مرجع [۲] و ۰ اشاره کرد که در مرجع [۲] از جاذبه‌ای با خاصیت غیرخطی غیرقابل خطی شدن برای کنترل ارتعاشات لوله‌های حاوی جریان سیال استفاده شده و در مرجع ۰ از همین روش برای انتقال هدفمند از تیر دوسرگیردار به جاذب استفاده شده است. در صورت استفاده از میراگر، جاذب دینامیکی تحت عنوان جاذب میراشده تنظیم‌شونده شناخته می‌شود که در کار حاضر نیز مورد توجه قرار گرفته است.

مطالعات نشان می‌دهد که ایده‌های متفاوتی تا به امروز برای ساخت و طراحی المان‌های جاذب شامل فنر و میراگر ارائه شده که بخشی از آن‌ها مبتنی بر استفاده از سازه‌های پیوسته هستند. در واقع در ایده استفاده از سازه‌های پیوسته، به‌جای استفاده از فنر معمول برای ساخت جاذب، از خاصیت فنری یک سازه پیوسته یا به‌جای استفاده از میراگر ویسکوز، مواد ویسکوالاستیک در ساختار جاذب به‌کار گرفته می‌شود.

سازه‌های پیوسته به‌علت مزایایی مانند سهولت ساخت و دارا بودن بینهایت مود ارتعاشی و غیره می‌توانند جایگزین مناسبی برای جاذب حاوی فنر یا جاذب‌های سنتی باشند. میراگرهای ویسکوالاستیک هم طبق مطالعات باتو و ادیکاری [۵] می‌تواند منجر به عمل‌کرد بهتر جاذب در مقایسه با میراگر ویسکوز شود.

از نمونه‌های استفاده از سازه‌های پیوسته برای جاذب می‌توان به مطالعه وسترآن و همکاران [۶] اشاره کرد که در آن از طریق مطالعات تجربی نشان داده شد که استفاده از یک جاذب خطی پیوسته در بال پرنده منجر به افزایش سرعت فلاتر تا ۳۴٪ و کاهش دامنه ارتعاشات چرخه‌حدی تا ۲۵٪ می‌شود. در ساختار جاذب ارائه شده در این پژوهش، از تیر یک‌سرگیردار و جرم صلب در انتهای آزاد تیر استفاده شده است.

ایده استفاده از جاذب پیوسته، توسط هوانگ و لین [۷] جهت کنترل ارتعاشات تجهیزات دوار معرفی شد. در طراحی این جاذب از دو تیر با الحاق یک‌سرگیردار به سازه

با مدلسازی این نوع سازه‌ها نیز در مطالعات اولیه تنها کرنش برشی مرتبه اول برای هسته در نظر گرفته شده و از سایر کرنش‌ها صرف‌نظر شد. ضمن اینکه وابستگی خواص ماده ویسکوالاستیک به فرکانس در تحلیل‌ها لحاظ نشد. با توجه به خطاهای ایجاد شده در اثر این ساده‌سازی‌ها بسیاری از مطالعات بعدی در رابطه با سازه‌های ساندویچی ویسکوالاستیک با تمرکز بر مدل‌های دقیق‌تر هسته مثل استفاده از نظریه‌های مراتب بالاتر برشی و یا احتساب کرنش‌های نرمال راستای ضخامت هسته انجام شد که از جمله آنها می‌توان به مطالعه [۱۴] اشاره کرد.

استفاده از این نوع سازه‌ها در ساختار جاذب توسط یاپروک و همکاران [۱۵] مورد توجه قرار گرفت. در این مطالعه، از تیر سه‌لایه با لایه میانی از جنس سیال مغناطیسی رئولوژیکی استفاده شد. در این نوع جاذب، سفتی سیال با تغییر میدان مغناطیسی قابل تنظیم بوده و جاذب در پهنای باند وسیعی از فرکانس‌های تحریک عمل می‌کند. ایده استفاده از تیر ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک و رویه‌های الاستیک نیز در مطالعات سیدی و همکاران [۱۶] مورد توجه قرار گرفت. در این مطالعه، جاذب تیر ساندویچی با اتصال یک‌سرگردار به سازه‌ی اصلی و همراه با یک جرم صلب در انتهای آن، در نظر گرفته شد. نتایج این مطالعه نشان داد که جاذب پیوسته‌ی ویسکوالاستیک با وجود جرم صلب تا ۲۰٪ بیشتر از جاذب پیوسته بدون وجود این جرم سبب کاهش دامنه ارتعاش سازه می‌شود.

تیر خمیده نیز از سازه‌هایی است که می‌توان از آن برای طراحی جاذب استفاده کرد. مطالعات یانگ و همکاران [۱۷] نشان داد که تیرهای خمیده دارای سفتی بالاتر و قابلیت تحمل بار بیشتر نسبت به تیرهای بدون انحنا بوده از طرفی به لحاظ هندسی در فضاهای دارای محدودیت مهندسی نیز، می‌توان از آن‌ها استفاده کرد. علاوه بر این در تیرهای خمیده، امکان تغییر سفتی و فرکانس به راحتی و از طریق تغییر میزان انحنای تیر امکان‌پذیر است. بر این اساس، استفاده از این نوع سازه برای طراحی جاذب انتخاب مناسبی به نظر می‌رسد. با این وجود، تا به امروز مطالعه‌ی در خصوص جاذب ساخته شده از تیر خمیده به‌ویژه تیر خمیده سه‌لایه با هسته ویسکوالاستیک انجام نشده است.

اصلی استفاده شد. انتهای آزاد تیرها نیز از طریق فنر به هم متصل شده است. مقایسه این ساختار جاذب با جاذب متشکل از یک تیر با الحاق یک‌سرگردار به تجهیز دوار، نشان از عمل کرد مفیدتر آن داشت. وانگ و چنگ [۸] نیز از سازه تیری شکل با سطح مقطع غیریکنواخت برای طراحی جاذب مورد استفاده در تجهیزات دوار استفاده کردند. در این نوع جاذب با تغییر توزیع سطح مقطع در طول تیر، امکان تنظیم فرکانس مودهای مختلف تیر با فرکانس‌های تحریک متعدد سیستم دوار فراهم شد.

در طراحی جاذب‌های تطبیقی نیز از المان‌های پیوسته می‌توان استفاده کرد. یک روش ساده برای طراحی جاذب‌های تطبیقی، استفاده از دو تیر منحنی یکسان در ساختار آن است که توسط برنان [۹] ارائه شد. در این طرح، با تنظیم انحنای هر تیر با استفاده از محرک‌های پیزوالکتریک، سفتی تغییر می‌کند. فرکانس طبیعی متناسب با سفتی بوده و رابطه‌ی معکوس با ارتفاع خیز تیر یا همان انحنا دارد؛ لذا با تغییر انحنا می‌توان به سفتی‌های متفاوت و بالطبع به فرکانس‌های طبیعی متفاوت دست یافت. به‌عنوان نمونه‌ای دیگر از جاذب‌های تطبیقی پیوسته، می‌توان به جاذب ارائه شده توسط رستگی و برنان [۱۰] اشاره کرد که در آن جاذب از آلیاژهای حافظه‌دار ساخته شده است. در این نوع جاذب با تغییر دما، سفتی تغییر یافته و در نتیجه فرکانس جاذب قابل تنظیم بود.

با افزایش استفاده از جاذب‌های پیوسته، مطالعاتی در زمینه مقایسه‌ی جاذب‌های پیوسته و سنتی صورت گرفت. از مطالعات مرتبط در این زمینه می‌توان به مطالعه‌ی هووا و همکاران [۱۱] اشاره کرد. مطالعات هووا و همکاران نشان از عمل کرد بهتر جاذب پیوسته نسبت به جاذب سنتی در کاهش پاسخ دارد.

ترکیب سازه پیوسته و میراگرهای غیرویسکوز در حالت چندلایه و ساندویچی نیز در برخی مطالعات مورد توجه قرار گرفته است. میرایی بالای این‌گونه سازه‌ها در مطالعات متعددی از جمله مطالعه کروین [۱۲] و مک [۱۳] مورد تایید قرار گرفته است. در واقع مقید شدن یک لایه با میرایی بالا و سفتی پائین بین لایه‌های با سفتی بالا موجب افزایش کرنش‌های برشی در لایه‌ی میانی هنگام خمش سازه شده و افزایش میرایی در مودهای خمشی را در پی دارد. در رابطه

هرچند در رابطه با ارتعاشات تیرهای خمیده ساندویچی مطالعات متعددی انجام شده که از آن جمله می‌توان به مطالعه سرپرست و ابراهیمی ممقانی [۱۸] روی تیرهای کامپوزیتی با خمیدگی زیاد تحت اثر بارهای متحرک و یا مطالعه کومار و سینگ [۱۹] روی پنل‌های ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک اشاره کرد.

با توجه به این مطالب، نوآوری این پژوهش به‌طور خلاصه در استفاده از مدل‌های برشی مرتبه بالا برای تحلیل دقیق رفتار و کارایی و صلابت جاذب ساخته شده از تیر ساندویچی با لایه میانی ویسکوالاستیک است که بدین شکل جامع و با در نظر گرفتن اثر پارامترهای مختلف در هیچ مطالعه‌ای مورد توجه قرار نگرفته است. ضمن اینکه تیر نیز برای اولین در این مطالعه به شکل کمافی در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در بالا نیز گفته شد، دو مزیت عمده نسبت به تیر مستقیم و بدون انحنا دارد؛ اول اینکه از تیر کمافی می‌توان در فضاهای با محدودیت ابعادی بیشتری استفاده کرد؛ دوم اینکه تغییر و تنظیم سفتی و فرکانس سازه در تیر خمیده به راحتی از طریق نزدیک کردن دو انتهای تیر با اعمال کمترین نیرو قابل انجام است.

در مدل‌سازی هسته با توجه به استفاده از هسته نسبتاً ضخیم از نظریه مرتبه بالا استفاده شده است. در لایه‌های مقیدکننده نیز به دلیل ضخامت کم و سفتی بالاتر در مقایسه با هسته، از مدل اوپلر-برنولی استفاده شده است. برای حل از روش اجزاء محدود و المان‌های یک‌بعدی سه‌گره‌ای با توابع شکل لاگرانژی و هرمیتی استفاده شده است. در نهایت با استخراج ماتریس‌های سختی، جرم و بردار نیرو، پاسخ فرکانسی سازه و مقدار کمینه آن برای شرایط هندسی و مقادیر مختلف جرم صلب به دست آمده و از طریق بررسی تغییر دامنه با مشخصات جاذب، جاذب کارآمد تعیین شد. علاوه بر این، صلابت<sup>۱</sup> جاذب طراحی شده تحت اثر تغییرات دما نیز مورد بررسی قرار گرفت.

## ۲- مدل‌سازی

در شکل ۱ مدل هندسی جاذب ساندویچی خمیده متصل شده به سازه اصلی به همراه دستگاه مختصات مورد استفاده نمایش داده شده است. طبق شکل، شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای دو سر تیر به شکل تکیه‌گاه ساده (مشخص شده با مثلث مشکی) و گیردار به ترتیب در انتهای سمت راست و چپ است و خود تکیه‌گاه‌ها نیز به سازه اصلی متصل شده‌اند؛ همچنین لازم به ذکر است که نحوه دستیابی به این شرایط تکیه‌گاهی در این مطالعه مدنظر نبوده و هدف اصلی بررسی، کارایی تیر ساندویچی ویسکوالاستیک با فرض امکان اتصال به سازه اصلی است. البته واضح است که ایجاد اتصال در عمل به‌طور قطع امکان‌پذیر بوده و یکی از راه‌های آن استفاده از یک قاب U-شکل برای تیر است، به‌طوریکه خود قاب نیز به کمک پیچ به سازه اصلی متصل شود. تنها مشکلی که ممکن است پیش بیاید، بروز مشکل در ایجاد شرایط تکیه‌گاهی گیردار کامل است. در این حالت یکی از روش‌های معمول برای ایجاد شرایط نزدیک به واقعیت در مدلسازی، در نظر گرفتن یکی از تکیه‌گاه‌ها به شکل گیردار کامل و تکیه‌گاه دیگر به شکل تکیه‌گاه ساده است که در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است.

در شکل ۱، همچنین  $s$ ،  $r_b$ ،  $r_t$ ،  $r_c$  و  $\varphi$  به ترتیب نشان‌دهنده شعاع لایه‌های بالا، هسته، پائین، طول و زاویه‌ی کمان هستند.  $L_{rm}$  نیز طول جرم صلب و  $h_g$  فاصله‌ی مرکز جرم صلب از خط میانی لایه‌ی بالای تیر هستند. در روابط نیز  $z$  و  $z_b$  به ترتیب بیان‌گر محور شروع شده از میانه لایه‌های بالا، هسته و پائین بوده و  $h_c$ ،  $h_t$  و  $h_b$  به ترتیب ضخامت لایه‌های بالا، هسته و پائین می‌باشند.  $b$  عرض تیر و  $L$  طول آن است. فرضیاتی که برای مدل‌سازی تیر ساندویچی در نظر گرفته شده‌اند، به این قرار است: ۱. کلیه لایه‌ها از جنس مواد همگن و همسانگرد بوده و رفتاری خطی دارند ۲. کرنش برشی تنها برای هسته در نظر گرفته شده است. ۳. بین لایه‌ها هیچ‌گونه لغزشی وجود ندارد و اتصال کامل برقرار است ۴. روابط لایه‌های بالا و پائین با مدل اوپلر-برنولی و روابط هسته با نظریه مرتبه بالا و صرف‌نظر از کرنش نرمال راستای ضخامت استخراج شده است.

<sup>۱</sup> Robustness

$$w_t \left( z = -\frac{h_t}{2} \right) = w_c \left( z = +\frac{h_c}{2} \right)$$

$$w_b \left( z = +\frac{h_b}{2} \right) = w_c \left( z = -\frac{h_c}{2} \right) \quad (۴)$$

در رابطه (۱)،  $w_0$  و  $u_3, u_2, u_1, u_0$  متغیرهای جابجایی بوده و به این کمیت‌ها، جابجایی‌های لایه‌های بالا و پائین که از رابطه (۲) و نظریه‌ی اویلر-برنولی استخراج شده‌اند، یعنی:  $w_{0b}$  و  $w_{0t}, u_{1b}, u_{1t}, u_{0b}, u_{0t}$  با اعمال شرط عدم لغزش، جابجایی‌ها به پنج عدد یعنی ترم-های  $w_{0b}$  و  $u_1, u_0, u_{0t}, u_{0b}$  خواهند رسید.

### ۲-۲- روابط کرنش-جابجایی

حال با استفاده از میدان‌های جابجایی رابطه (۱) و (۲)، روابط کرنش-جابجایی بدون احتساب عبارات‌های غیرخطی هندسی و با فرض کرنش‌ها و چرخش‌های کوچک، مطابق رابطه (۵) به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_{sz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \quad (۵)$$

که در این رابطه،  $\varepsilon_{sz}$  و  $\varepsilon_{ss}$  کرنش‌های نرمال در راستای محور  $s$  و کرنش برشی هستند. در ادامه با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۵) داریم:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss}^0 + z\varepsilon_{ss}^1 + z^2\varepsilon_{ss}^2 + z^3\varepsilon_{ss}^3$$

$$\varepsilon_{sz} = \varepsilon_{sz}^0 + z\varepsilon_{sz}^1 + z^2\varepsilon_{sz}^2 \quad (۶)$$

در رابطه‌ی بالا ضرایب  $\varepsilon_{sz}^{0,1,2,3}$  کرنش‌های بدون وابستگی به راستای  $z$  هستند و با رابطه‌ی (۷) به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{ss}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w_0}{r}, \quad \varepsilon_{ss}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial s},$$

$$\varepsilon_{ss}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial s}, \quad \varepsilon_{ss}^3 = \frac{\partial u_3}{\partial s},$$

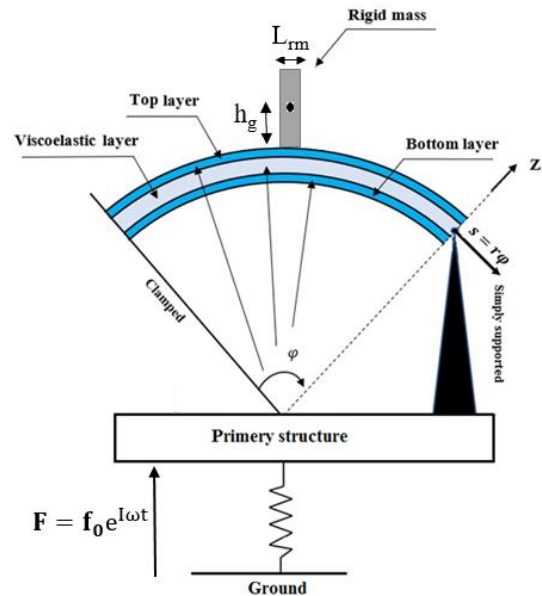
$$\varepsilon_{sz}^0 = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial s} - \frac{u_0}{r},$$

$$\varepsilon_{sz}^1 = 2u_2 - \frac{u_1}{r}, \quad \varepsilon_{sz}^2 = 3u_3 - \frac{u_2}{r} \quad (۷)$$

مشابه با همین تعریف، با جایگذاری میدان‌های جابجایی ارائه شده در رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۵)، کرنش‌های نرمال در راستای محور  $s$  برای لایه‌ی بالا و پائین طبق رابطه‌ی (۸) بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss}^{0i} + z\varepsilon_{ss}^{1i}$$

$$i = t, b \quad (۸)$$



شکل ۱- مدل هندسی جاذب ساندویچی خمیده

### ۲-۱- روابط سینماتیک

طبق نظریه مرتبه بالا، جابجایی درون صفحه‌های  $u_c$  و  $u_b$  و برون صفحه‌های  $w_c$  برای هسته، از رابطه (۱) محاسبه شده است [۲۰، ۲۱]:

$$u_c = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3$$

$$w_c = w_0 \quad (۱)$$

برای محاسبه جابجایی درون صفحه‌های و برون صفحه‌های لایه‌های الاستیک نیز از رابطه زیر استفاده شده است:

$$u_i = u_{0i} + z_i u_{1i}$$

$$w_i = w_{0i}, \quad i = t, b \quad (۲)$$

در رابطه (۲) اندیس‌های  $t$  و  $b$  نشان‌دهنده لایه‌های بالا و پائین هستند. روابط (۳) برای چرخش تیر خمیده برقرار است:

$$u_{1i} = \frac{u_{0i} - w_{i,\varphi}}{r_i} \quad (۳)$$

جهت دستیابی به عدم لغزش در سطوح مشترک رویه‌ها و پیوستگی جابجایی‌ها، کمیت‌های هم‌راستای جابجایی در محل اتصال رویه‌ها بایستی یک مقدار داشته باشند. یعنی:

$$u_t \left( z = -\frac{h_t}{2} \right) = u_c \left( z = +\frac{h_c}{2} \right)$$

$$u_b \left( z = +\frac{h_b}{2} \right) = u_c \left( z = -\frac{h_c}{2} \right)$$

دینامیکی مواد از انطباق توابع ریاضی با داده‌های حاصل از نتایج آزمایشگاهی بدست آمده‌اند. در رابطه (۱۳) خواص دینامیکی ای‌اس‌دی ۱۱۲ ارائه شده است:

$$G' = \log(\mathcal{M}) + \frac{2 \log\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}\right)}{1 + (\mathcal{F}/f_r)^{\mathcal{H}}}$$

$$\log(\eta) = \log(\eta_0)$$

$$+ \frac{((S_H + S_L)\alpha_0 + (S_L - S_H)(1 - \sqrt{1 + \alpha_0^2}))\beta_0}{2}$$

$$\log(f_r) = \log(f) - \frac{12(T - T_0)}{525 + T - T_0}$$

$$\alpha_0 = \frac{\log(f_r) - \log(f_0)}{\beta_0} \quad (13)$$

که در این روابط  $G$ ،  $T$  و  $\omega$  به ترتیب مدول برشی بر حسب پوند بر اینچ مربع، دمای محیط بر حسب فارنهایت و فرکانس تحریک بر حسب هرتز می‌باشند. مقادیر ثابت رابطه (۱۳)، در رابطه (۱۴) ارائه شده است [۲۲]:

$$\mathcal{R} = 6.45 \times 10^2, \mathcal{F} = 2.45 \times 10^5,$$

$$T_0 = 150^\circ\text{F}, \eta_0 = 0.87, \beta_0 = 1.8,$$

$$\mathcal{M} = 2.194 \times 10^1, \mathcal{H} = 0.372,$$

$$S_H = 0.385, S_L = 0.115,$$

$$f_0 = 7.340 \times 10^5 \quad (14)$$

رویه‌ها با نظریه تیر اویلر-برنولی مدل شده‌اند؛ بنابراین کرنش‌های برشی این لایه‌ها صفر بوده و رابطه ساختاری این لایه‌ها طبق رابطه (۱۵) خواهد بود:

$$\sigma_{ss} = E_i \varepsilon_{ss}^i$$

$$i = b, t \quad (15)$$

حال بعد از استخراج روابط تنش در لایه‌ها، منته‌های تنش برای هسته، با رابطه (۱۶) و برای لایه‌های الاستیک از طریق رابطه (۱۷)، قابل محاسبه است:

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^i dz, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (16)$$

$$\alpha, \beta: s, z$$

$$N_{ss}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss} z^i dz, \quad i = 0, 1 \quad (17)$$

ترم‌های  $\varepsilon_{ss}^{0i}$  و  $\varepsilon_{ss}^{1i}$  در رابطه‌ی (۸)، با رابطه‌ی (۹) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{ss}^{0i} = \frac{\partial u_{0i}}{\partial s} - \frac{w_{0i}}{r},$$

$$\varepsilon_{ss}^{1i} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0i}}{\partial s} - \frac{\partial^2 w_{0i}}{\partial s^2}$$

$$i = t, b \quad (9)$$

### ۲-۳- روابط ساختاری

روابط ساختاری ماده‌ی ویسکوالاستیک در حوزه‌ی فرکانس و یا در حوزه زمان تعریف می‌شود. در حوزه زمان، نیاز به استفاده از انتگرال بولتزمن برای بیان رابطه تنش و کرنش بوده که تا اندازه‌ای موجب پیچیده‌تر شدن روابط حاکم می‌شود. در مقابل، بیان روابط در حوزه فرکانس به کمک مدول مختلط به صورت رابطه (۱۰) امکان‌پذیر خواهد بود:

$$G = G'(1 + \eta I) \quad (10)$$

با توجه به در دسترس بودن نمودارهای تجربی تغییرات مدول مختلط با فرکانس [۲۲]، در این مقاله از همین روش استفاده شده است. با فرض همسان‌گرد بودن ماده، روابط ساختاری به کمک قانون هوک برای هسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ss} = E \varepsilon_{ss}$$

$$\sigma_{sz} = G \varepsilon_{sz} \quad (11)$$

در رابطه بالا  $E$  و  $I = \sqrt{-1}$ ،  $\nu$  و  $\eta$  به ترتیب بیان‌گر مدول انباشت، ضریب پواسون و ضریب میرایی است. مدول انباشت ماده‌ی ویسکوالاستیک با فرض همسان‌گرد بودن ماده با استفاده از رابطه (۱۲) قابل محاسبه است.

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (12)$$

در این پژوهش، هسته ویسکوالاستیک از جنس ماده ای‌اس‌دی ۱۱۲<sup>۱</sup> انتخاب شده است و برای تعیین مدول انباشت و ضریب میرایی این ماده، از نتایج تجربی و آزمایشگاهی ارائه شده در مرجع [۲۲]۰ استفاده شده است. در مرجع نام برده خواص میرایی، وابستگی فرکانسی و دمایی مواد مختلف مورد آزمایش قرار گرفته است و خواص

<sup>۱</sup> ISD 112

$$T_p = \frac{1}{2} M_p \dot{w}_p^2 \quad (23)$$

$M_p$  جرم سازه‌ی اصلی است و در نهایت عبارت  $T_{rm}$  انرژی جنبشی جسم صلب متصل شده به لایه بالاست که از رابطه (۲۴) قابل محاسبه خواهد بود:

$$T_{rm} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left[ \frac{I_{rm}}{L_{rm}} \omega_{rm}^2 + \frac{M_{rm}}{L_{rm}} v_{rm}^2 \right] dx \quad (24)$$

که  $I_{rm}$ ،  $M_{rm}$ ،  $v_{rm}$  و  $\omega_{rm}$  به ترتیب ممان اینرسی، جرم، سرعت و سرعت زاویه‌ای جرم صلب بوده و به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\omega_{rm} = \frac{\partial \dot{w}_{0t}}{\partial s}$$

$$v_{rm} = \sqrt{v_{rms}^2 + v_{rmz}^2}$$

$$v_{rmz} = \dot{w}_{0t} + \dot{w}_p$$

$$v_{rms} = \dot{u}_t \left( z = \frac{h_t}{2} \right) - h_g \left( \frac{d\dot{w}_{0t}}{ds} \right) \quad (25)$$

$L_{rm}$  طول جرم صلب و  $h_g$  فاصله مرکز جرم صلب از خط میانی لایه بالایی تیر است.  $I_{rm}$  ممان اینرسی بوده و با استفاده از رابطه  $I_{rm} = M_{rm} h_g^2$  محاسبه می‌شود؛ هم‌چنین در پژوهش حاضر، تحریک پایه هارمونیک فقط به سازه اصلی وارد می‌شود که طبق رابطه (۲۶) قابل بیان است:

$$F(x, t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (26)$$

و لذا وردیش<sup>۱</sup> کار طبق رابطه زیر خواهد بود.

$$\delta W_{ext} = F(x, t) \delta w_p \quad (27)$$

که  $\delta w_p$  وردش جابجایی سازه اصلی است و  $\omega$  فرکانس نیروی هارمونیک است.

### ۳- روش اجزاء محدود

در این بخش به نحوه حل روش اجزاء محدود پرداخته خواهد شد. برای هم‌خوانی با هندسه تیر از المان یک‌بعدی استفاده شده که جهت حل دقیق و پیوستگی جابجایی‌ها، این المان سه‌گره‌ی انتخاب و در شکل ۲ نشان داده شده است.

در شکل ۲،  $\xi$  مختصات بی بعد هر المان است که مبدأ آن در مرکز المان قرار گرفته است و رابطه آن با دستگاه مختصات در جهت  $s$  برای المان  $n_e$  ام به صورت رابطه (۳۱) خواهد بود:

### ۲-۴- روابط انرژی

به منظور استخراج ماتریس‌های اجزاء محدود از روابط لاگرانژ، تیر در راستای طولی به تعداد دلخواهی از المان‌های سه‌گره‌ی تقسیم می‌شود. سپس ماتریس سفتی و ماتریس جرم برای هر المان استخراج می‌شود. در این راستا در گام اول نیاز به تعیین روابط مربوط به انرژی پتانسیل  $U$ ، انرژی جنبشی  $T$  و کار نیروهای خارجی است. برای هسته، انرژی پتانسیل با رابطه (۱۸) به دست می‌آید:

$$U_c^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} (N_{ss}^0 \mathcal{E}_{ss}^0 + N_{ss}^1 \mathcal{E}_{ss}^1 + N_{ss}^2 \mathcal{E}_{ss}^2 + N_{ss}^3 \mathcal{E}_{ss}^3 + N_{rs}^0 \mathcal{E}_{sz}^0 + N_{sz}^1 \mathcal{E}_{sz}^1 + N_{sz}^2 \mathcal{E}_{sz}^2) ds \quad (18)$$

در رابطه بالا،  $L_e$  طول المان است. به همین ترتیب انرژی پتانسیل برای لایه‌های الاستیک نیز استخراج می‌شود که البته در مقایسه با رابطه (۱۸)، تنها دو عبارت اول از جملات داخل انتگرال برای این دولایه، غیر صفر خواهد بود. انرژی پتانسیل سازه اصلی نیز با رابطه (۱۹) قابل محاسبه است:

$$U_p = \frac{1}{2} k w_p^2 \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)،  $k$  سفتی فنری است که در مدل‌سازی استفاده شده و عدد دهی می‌شود و  $w_p$  جابجایی سازه اصلی در راستای محور  $z$  است. در نهایت انرژی پتانسیل کل از جمع انرژی‌های تک تک لایه‌ها و سازه اصلی بدست می‌آید:

$$U^{(e)} = U_t^{(e)} + U_b^{(e)} + U_c^{(e)} + U_p \quad (20)$$

هم‌چنین انرژی جنبشی کل با رابطه (۲۱) بدست خواهد آمد:

$$T^{(e)} = T_t^{(e)} + T_b^{(e)} + T_c^{(e)} + T_p + T_{rm} \quad (21)$$

که در این رابطه  $T_t^{(e)}$  و  $T_b^{(e)}$ ،  $T_c^{(e)}$  به ترتیب انرژی‌های جنبشی هسته، لایه بالا و پائین هستند و به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شوند:

$$T_c^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{L_e} \rho_c [\dot{u}^2 + (\dot{w} + \dot{w}_p)^2] ds dz$$

$$T_i^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \int_0^{L_e} \rho_i [\dot{u}_i^2 + (\dot{w}_i + \dot{w}_p)^2] ds dz$$

$$i = b, t \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)،  $\rho_t$ ،  $\rho_c$  و  $\rho_b$  به ترتیب چگالی لایه بالا، هسته و لایه پائین هستند.  $T_p$  نیز انرژی جنبشی سازه اصلی بوده و با رابطه (۲۳) قابل محاسبه است:

<sup>1</sup> Variation

لایه، این نوع تابع شکل انتخاب شده است؛ بنابراین مؤلفه‌های ردیف پنجم ماتریس  $\mathbf{N}$  از طریق رابطه (۳۴) تعیین می‌شوند:

$$N_{2(6i-4)} = S_i^{(2)}(\xi) \\ N_{2(6i-3)} = D_i^{(2)}(\xi), i = 1, 2, 3 \quad (34)$$

توابع شکل هرمیتی  $S_i^{(2)}(\xi)$  و  $D_i^{(2)}(\xi)$  با پیوستگی مرتبه ۱ برای المان سه‌گره‌ای به صورت روابط (۳۵) و (۳۶) بدست می‌آیند:

$$S_1^{(2)} = \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi\xi^2$$

$$S_2^{(2)} = \xi^4 - 2\xi^2 + 1$$

$$S_3^{(2)} = -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \quad (35)$$

$$D_1^{(2)} = \frac{1}{4}(\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2)$$

$$D_2^{(2)} = (\xi^5 - 2\xi^3 + \xi)$$

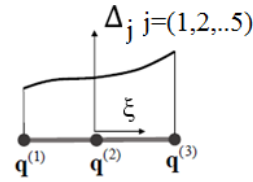
$$D_3^{(2)} = \frac{1}{4}(\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2) \quad (36)$$

حال بعد از تعریف مجهول‌های جابجایی و جای‌گذاری در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل، روابط زیر برای هر المان بدست می‌آیند:

$$U^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^e q_i(t) q_j(t) \\ T^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^e \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (37)$$

در رابطه فوق  $n$  برابر ۱۸ بوده و ماتریس‌های  $\mathbf{K}_{ij}^e$  و  $\mathbf{M}_{ij}^e$  ماتریس‌های سفتی و جرم می‌باشند که عبارات پارامتریک این ماتریس‌ها بسیار طولانی بوده و لذا قابل ارائه در اینجا نیستند. نکته مهم اینکه، در ماتریس جرم اثر جرم صلب باید صرفاً برای المان شامل این جرم یعنی المان میانی تیر در نظر گرفته شود. برای محاسبه بردار نیروی خارجی هر المان نیز می‌توان از رابطه (۲۶)، (۲۷) و (۳۸) استفاده کرد و به عناصر غیر صفر بردار نیروی المان‌های تیر رسید. واضح است که بردار نیرو نیز دارای ۱۸ عضو خواهد بود.

$$\mathbf{Q}_i^{(e)} = \frac{\partial \delta w_{ext}}{\partial \delta q_i} \quad (38)$$



شکل ۲- المان سه‌گره‌ای با مختصات بی بعد  $\xi$

$$\xi = \left( \frac{2s}{L_e} - 1 \right) - 2(n_e - 1) \quad (28)$$

بردار  $\mathbf{q}^{(i)}$  در این شکل، بردار جابجایی‌های گره‌ای است و برای تیر سه‌لایه به صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{q}^{(i)} = [u_{0b}^{(i)}, w_{0b}^{(i)}, w_{0b,s}^{(i)}, u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, u_{0t}^{(i)}]^T \\ i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

$i$  نشان دهنده شماره گره المان است؛ بنابراین هر گره دارای ۶ درجه آزادی و هر المان ۱۸ درجه آزادی خواهد داشت. در شکل ۳،  $\Delta$  بردار درجات آزادی هر گره است که در رابطه (۳۰) نشان داده شده است.

$$\Delta(\xi) = [u_{0b}, w_{0b}, u_0, u_1, u_{0t}]^T \quad (30)$$

$\Delta$  به کمک توابع شکلی که از درون‌یابی توابع چندجمله‌ای برای المان سه‌گره‌ای بدست آمده، تقریب زده می‌شود:

$$\Delta = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (31)$$

در این رابطه،  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(1)}; \mathbf{q}^{(2)}; \mathbf{q}^{(3)}]$  است که در رابطه (۲۹) تعریف شده،  $\mathbf{N}$  نیز ماتریس توابع شکل نام دارد و شامل ۵ ردیف و ۱۸ ستون است. آرایه‌های غیر صفر ردیف‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ از طریق رابطه (۳۲) بدست می‌آیند:

$$N_{1(6i-5)} = N_{3(6i-2)} = N_{4(6i-1)} \\ = N_{5(6i)} = S_i^{(1)}(\xi), \\ i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)،  $S_i^{(1)}$  تابع شکل لاگرانژی برای المان سه‌گره‌ای است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S_1^{(1)} = \frac{\xi^2 - \xi}{2}, S_2^{(1)} = -\xi^2 + 1, \\ S_3^{(1)} = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad (33)$$

مؤلفه دیگر  $\Delta$  که کمیت جابجایی خارج صفحه لایه پائین  $w_{0b}$  است، به کمک توابع شکل هرمیتی با پیوستگی  $C^1$  تقریب زده می‌شود که به علت فرض اویلر-برنولی بودن این



انجام می‌شود که شرط اختلاف کمتر از  $0.001\%$  بین فرکانس مرحله قبل و فرکانس جدید برقرار شود.

بعد از همگرایی، میرایی ( $\eta$ ) از تقسیم بخش موهومی بر قسمت حقیقی مقدار ویژه به دست می‌آید. بردارهای ویژه حاصل از حل معادله مقدار ویژه، ماتریس مودال را تشکیل می‌دهند. مبنای روش کاهش مرتبه، بسط مودال است و بردار جابجایی‌های گرهی به صورت رابطه (۴۰) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{q} = \Psi \mathbf{r} \quad (40)$$

$\Psi$  ماتریس بردارهای ویژه است که نسبت به ماتریس جرم نرمال شده است. نکته حائز اهمیت استفاده از مدل کاهش یافته ماتریس مودال برای افزایش سرعت در محاسبات است. بدین معنی که تنها تعدادی محدود از بردارهای ویژه برای تشکیل ماتریس  $\Psi$  استفاده شده و تعداد ستون‌های ماتریس کاهش می‌یابد. با جایگذاری رابطه (۴۰) در رابطه (۳۹) و ضرب طرفین این معادله در ترانهاده ماتریس مودال یعنی  $\Psi^T$  این معادله به شکل (۴۱) تبدیل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{r} = \bar{\mathbf{F}} \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi, \bar{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi, \bar{\mathbf{F}} = \Psi^T \mathbf{F}$$

با جایگذاری روابط زیر در رابطه (۴۱):

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \quad (42)$$

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} e^{i\omega t}$$

و پس از انجام عملیات ریاضی داریم:

$$(-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{f}}_0 \quad (43)$$

با ضرب معکوس ماتریس  $(-\omega^2 \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}})$  در بردار  $\bar{\mathbf{f}}_0$  بردار  $\bar{\mathbf{r}}$  بدست می‌آید که در فضای مودال بوده و جهت دست‌یابی به بردار در فضای فیزیکی،  $\bar{\mathbf{r}}$  را در ماتریس  $\Psi$  ضرب می‌کنیم. در بردار جابجایی‌های بدست آمده، آخرین مولفه، جابجایی سازه اصلی است. نکته مهم اینکه، در بردار نیرو نیز تنها آرایه غیر صفر، آرایه متناظر با این جابجایی است. با طی این مراحل در یک بازه فرکانسی می‌توان به پاسخ فرکانسی سازه اصلی دست یافت و با مقایسه جابجایی‌های این سازه در حالت با استفاده و بدون استفاده از جاذب، به نقش جاذب در کنترل ارتعاشات پی برد.

در نهایت با اعمال رابطه لاگرانژ، می‌توان ماتریس‌های مربوط به هر المان را محاسبه کرد. پس از آن نیز با مونتاژ ماتریس‌های بدست آمده و اختصاص یک سطر و ستون اضافه با آرایه انتهایی جرم و سفتی مربوط به سازه اصلی (سایر آرایه‌ها= صفر)، هم‌چنین اختصاص آخرین آرایه در بردار جابجایی به سازه اصلی، معادله حرکت نهایی به صورت رابطه (۳۹) حاصل خواهد شد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (39)$$

در رابطه (۳۹)،  $\mathbf{M}$  و  $\mathbf{K}$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی مونتاژ شده می‌باشند و  $\mathbf{F}$  بردار نیروی مونتاژ شده را نشان می‌دهد. در این ماتریس‌ها شرایط مرزی یک سر گیردار-ساده برای تیر خمیده، با حذف سطر و ستون مربوط به جابجایی‌های مقید، اعمال شده است. با استفاده از ماتریس جرم و سفتی می‌توان فرکانس طبیعی و میرایی سیستم تیر و سازه اصلی را محاسبه کرد.

به دلیل استفاده از ماده ویسکوالاستیک ای‌اس‌دی ۱۱۲ که مدول برشی آن، تابعی از فرکانس است، با زیاد شدن تعداد المان‌ها زمان اجرای برنامه‌ها نیز بیشتر می‌شود. برای رفع این مشکل از روش کاهش مرتبه<sup>۱</sup> استفاده شده است. این روش ضمن برخورداری از دقت بسیار خوب، زمان حل مسأله را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. بدین منظور:

۱. ماتریس سفتی تابع فرکانس است؛ یعنی

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\omega)$$

طریق عدد دهی، این ماتریس به شکل ماتریس با مقادیر عددی ثابت تبدیل می‌شود.

۲. مسأله مقدار ویژه مربوط به ماتریس جرم و ماتریس سفتی حاصل، حل شده و فرکانس طبیعی سیستم جاذب و سازه اصلی (جذر قسمت حقیقی مقدار ویژه) محاسبه می‌شود.

۳. از فرکانسی به دست آمده برای به‌روزرسانی  $\mathbf{K}$  استفاده شده و مسأله مقدار ویژه برای تعیین مقدار جدید فرکانس حل می‌شود.

۴. در صورتی که مقدار به دست آمده برای فرکانس با فرکانس مرحله قبل یکسان نباشد، گام ۳ با مقدار جدید فرکانس تکرار می‌شود. این تکرار تا زمانی

<sup>1</sup> Reduced-Order Method

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش به نتایج حاصل از حل معادله حرکت نهایی (رابطه ۳۹) و بحث پیرامون این نتایج پرداخته شده است. برای اطمینان از صحت کد رایانه‌ای و روابط استخراج شده، نتایج پژوهش حاضر با نتایج تحلیل مودال نرم افزار انسیس مقایسه شده و در گام بعدی با مطالعات پارامترهای اثرگذار در کارایی، جاذب کارآمد ارائه شده است. در گام سوم، بررسی تاثیر عوامل محیطی مانند تغییرات دما در کارایی جاذب انجام شده است.

#### ۴-۱- صحت سنجی

برای صحت سنجی از محیط وورکبنچ (workbench) نرم افزار انسیس استفاده شده است. مش بندی در انسیس با استفاده از امکانات مش زنی محیط وورکبنچ انجام شده که از المان solid به طور اتوماتیک برای این منظور استفاده می کند. تعداد تقسیمات المان در راستای طول تیر برابر با ۱۰۰ در نظر گرفته شده و در راستای ضخامت، برای هسته ۵ و برای لایه های بیرونی ۱ تقسیم استفاده شده است. کفایت این تعداد المان بندی با ریزتر کردن المان ها، مورد بررسی قرار گرفته و تغییر قابل توجهی در نتایج دیده نشد.

همچنین در مدل سازی، جرم صلب میانه تیر در نظر گرفته شده و شرایط مرزی به صورت یک سرگیردار تعریف شده است.

لایه های بالا و پائین در مدل انسیس آلومینیوم و لایه میانی نیز با ضریب پواسون ۰/۴۹ تعریف شده است. در جدول ۱، مشخصات لایه ها و جرم صلب ارائه شده است. لازم به ذکر است که طول جرم صلب برابر با یک المان در نظر گرفته شده است که نزدیک به فرض متمرکز بودن جرم صلب است. ممان اینرسی و فاصله مرکز جرم نیز در همه نتایج این بخش برابر با صفر در نظر گرفته شده مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد.

در جدول ۲، نتایج حاصل از مقایسه کد و تحلیل مودال نرم افزار انسیس ارائه شده است. نتایج نشان دهنده نزدیکی فرکانس ها به ویژه در مودهای پایین تر است که البته در مودهای بالاتر، میزان اختلاف افزایش می یابد. این اختلاف مربوط به تفاوت در نوع المان استفاده شده در انسیس (المان solid) با المان استفاده شده در کار حاضر و همچنین

صرف نظر از کرنش راستای نرمال ضخامت است. همان طور که در این جدول مشخص است، تطابق خوبی بین نتایج پژوهش حاضر و نتایج حاصل از تحلیل مودال در نرم افزار انسیس برقرار است و حداکثر خطا کمتر از ۰/۳٪ در مودهای پائین و کاربردی است. این انطباق دال بر صحت روابط استفاده شده و کد نرم افزاری است.

جدول ۱- معرفی مشخصات لایه ها

نمونه ۱	
۵	ضخامت هسته (mm)
۱	ضخامت رویه ها (mm)
۲۰	عرض لایه ها (mm)
۲۰۰	شعاع انحنا (mm)
۲/۱	مدول هسته (MPa)
۷۰	مدول رویه ها (GPa)
۹۶۸	دانسیته هسته (kg/m <sup>3</sup> )
۲۷۷۰	دانسیته رویه ها (kg/m <sup>3</sup> )
۰/۴۱	جرم صلب (kg)
نمونه ۲	
ضخامت هسته ۱۰ میلی متر و سایر مشخصات همانند نمونه ۱	

جدول ۲- مقایسه فرکانس تیر ساندویچی تحقیق حاضر با انسیس (فرکانس بر حسب هرترتز)

نمونه ۱		
فرکانس	پژوهش حاضر	روش المان محدود
$\omega_1$	۱/۶۵	۱/۶۵
$\omega_2$	۱۳/۰۳	۱۳/۲۷
$\omega_3$	۷۵/۷۲	۷۷/۰۱
نمونه ۲		
فرکانس	پژوهش حاضر	روش المان محدود
$\omega_1$	۱/۶۴	۱/۶۳
$\omega_2$	۱۲/۷۳	۱۲/۳۳
$\omega_3$	۷۴/۹۹	۷۲/۹۳

جدول ۳- بررسی همگرایی فرکانس طبیعی سیستم جاذب و سازه اصلی اول به ازای تعداد مختلف المان (فرکانس بر حسب هرتز)

تعداد المان	فرکانس تکرار اول	فرکانس همگرا
۱۰	۶/۰۳۲	۶/۰۸۲
۲۰	۵/۸۰۴	۵/۹۱۶
۳۰	۵/۸۲۸	۵/۹۳۲
۴۰	۵/۸۵	۵/۹۴۸

نسبت مجموع این جرم با جرم جاذب به جرم سازه اصلی یعنی  $\mu$  بیشتر از ۵٪ نشود. محور عمودی نیز مقدار بیشینه پاسخ فرکانسی بی‌بعد شده‌ی سازه نسبت به پاسخ بدون الحاق جاذب می‌باشد. از نمودارهای ارائه شده در شکل ۳ مشخص است که در دره‌های نمونه‌های مطالعه شده، هنگامی که ضخامت لایه‌های بالا و پائین ۱ میلی‌متر انتخاب شود، پاسخ فرکانسی سازه‌ی اصلی کمینه خواهد بود. مقایسه نتایج حاصل برای ضخامت‌های مختلف لایه بالا و پائین نیز نشان‌دهنده آن است که با افزایش ضخامت رویه بالا و پائین مقدار جرم صلب لازم برای دستیابی به بهترین عملکرد افزایش می‌یابد. علت وقوع این روند، افزایش سفتی سازه با افزایش ضخامت رویه‌هاست که در صورت عدم تغییر جرم صلب موجب افزایش فرکانس طبیعی جاذب و دور شدن آن از شرایط بهینه می‌شود. در این حالت افزایش جرم صلب الحاقی، باعث کاهش فرکانس و دست‌یابی دوباره به عمل‌کرد کارآمد خواهد شد.

حال، جهت ارائه دید بهتر، نمونه‌هایی که منجر به کمینه دامنه پاسخ می‌شوند، در شکل ۴ با هم مقایسه شده‌اند. هدف از ارائه شکل ۴، رسیدن به جاذب کارآمد است. همان‌گونه که در شکل ۴ مشخص است، دو نمونه با کمترین نسبت جرمی ( $\mu$ )، در کنترل ارتعاشات مفیدترند. این دو نمونه عبارت‌اند از: نمونه ۱: ضخامت هسته ۲ میلی‌متر و ضخامت رویه‌های ۱ میلی‌متر و نمونه ۲: ضخامت هسته ۵ میلی‌متر و ضخامت رویه‌های ۱ میلی‌متر.

در گام بعدی به مطالعه در همسایگی پارامترهای موثر این دو نمونه پرداخته شد و کمینه پاسخ با جاذب نمونه دوم

در جدول ۳ مقدار فرکانس طبیعی مود اول سیستم جاذب و سازه اصلی که در تکرار اول به‌دست آمده و همچنین مقدار همگرایی در انتهای فرآیند تکرار، به ازای تعداد متفاوت از المان‌ها ارائه شده است. نتایج نشان‌دهنده اختلاف کمتر از ۰/۰۶٪ بین فرکانس حاصل از ۲۰ المان و فرکانس حاصل از ۴۰ المان است. بر این اساس تعداد ۲۰ المان برای تعیین فرکانس مود اول کافی به نظر می‌رسد.

#### ۴-۲- مطالعه پارامتریک برای دستیابی به جاذب کارآمد

در ساختار جاذب، از ماده ویسکوالاستیک ای‌اس‌دی ۱۱۲ استفاده شده است. مشخصات این ماده در بخش ۲-۳ ارائه شد. جنس لایه‌های الاستیک بالا و پائین نیز آلومینیوم با دانسیته  $2770 \text{ kg/m}^3$  و مدول  $70 \text{ GPa}$  است؛ همچنین شرایط مرزی الحاق به سازه اصلی نیز یک‌سرگیردار- ساده انتخاب شده است. حال در ادامه، هندسه لایه‌های مطالعه شده معرفی شده است.

نمونه ۱: ضخامت هسته ۲ میلی‌متر و ضخامت لایه‌های الاستیک ۱، ۲، ۵ و ۱۰ میلی‌متر انتخاب شده است. نمودار مربوطه در شکل ۳-الف ارائه شده است.

نمونه ۲: ضخامت هسته ۵ میلی‌متر و ضخامت لایه‌های الاستیک ۱، ۲، ۵ و ۱۰ میلی‌متر انتخاب شده است. نمودار مربوطه در شکل ۳-ب ارائه شده است.

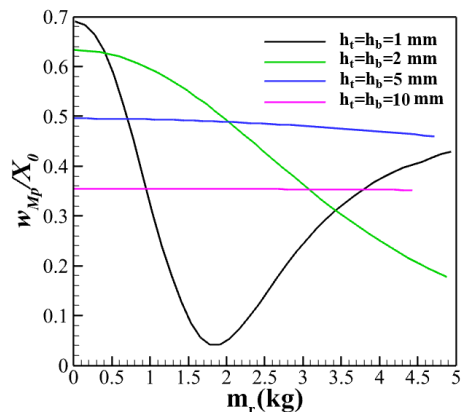
نمونه ۳: ضخامت هسته ۳ میلی‌متر و ضخامت لایه‌های بالا و پائین ۱، ۲، ۸ و ۱۰ میلی‌متر انتخاب شده است. نمودار مربوطه در شکل ۳-ج ارائه شده است.

نمونه ۴: ضخامت هسته ۲ میلی‌متر و ضخامت لایه‌های الاستیک ۱، ۵، ۱۰ و ۱۲ میلی‌متر انتخاب شده است. نمودار مربوطه در شکل ۳-د ارائه شده است.

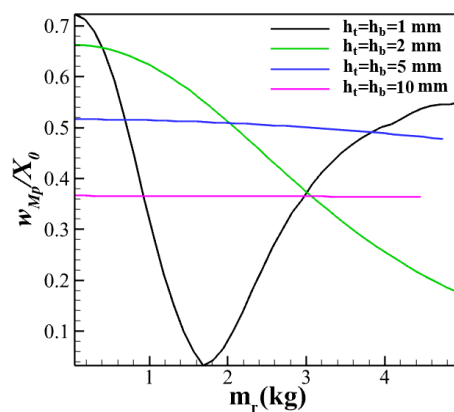
ضمن اینکه جرم صلب در همه مطالعات عددی انجام شده در میانه‌ی تیر در نظر گرفته شده است. شعاع انحنا ابتدا و در همه حالات ۵۰۰ میلی‌متر انتخاب شده است. محور افقی نمودارها، نشان‌دهنده‌ی اندازه‌ی جرم صلب می‌باشد و بازه‌ی تغییرات این جرم تا حدی در نظر گرفته شده است که

این نمودار مشخص است که شعاع انتخابی ۵۰۰ میلی‌متر در گام اول مطالعات، کارآمد است.

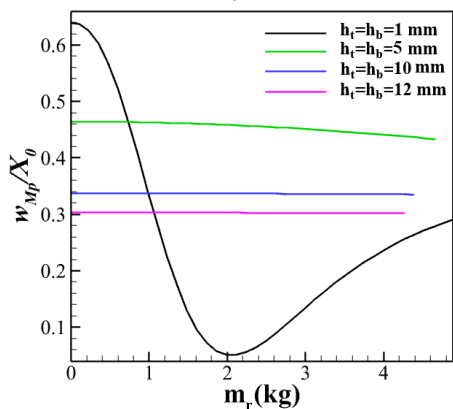
حاصل شد. جهت انتخاب شعاع کارآمد نیز مطالعات عددی صورت گرفته و نتایج در نمودار شکل ۵ ارائه شده است. از



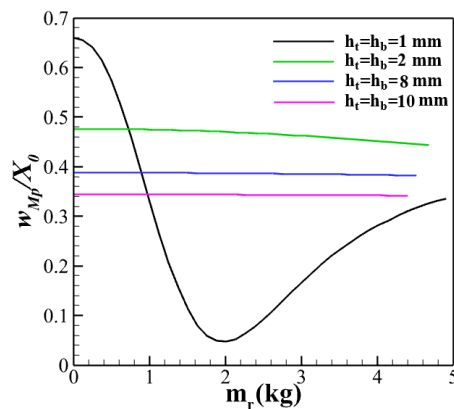
(ب)



(الف)



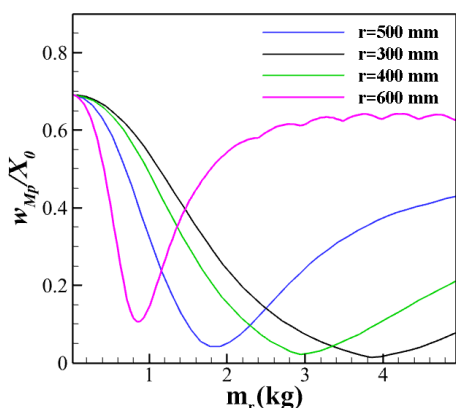
(د)



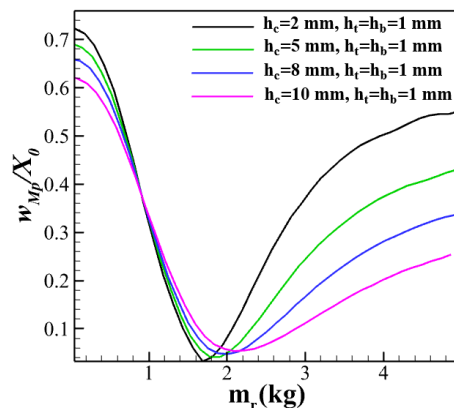
(ج)

شکل ۳- تغییرات پاسخ بیشینه سازه اصلی با تغییرات جرم صلب برای ضخامت‌های مختلف هسته:

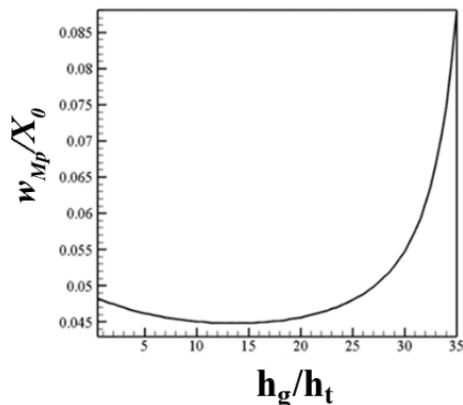
(الف) نمونه ۱، (ب) نمونه ۲، (ج) نمونه ۳ و (د) نمونه ۴



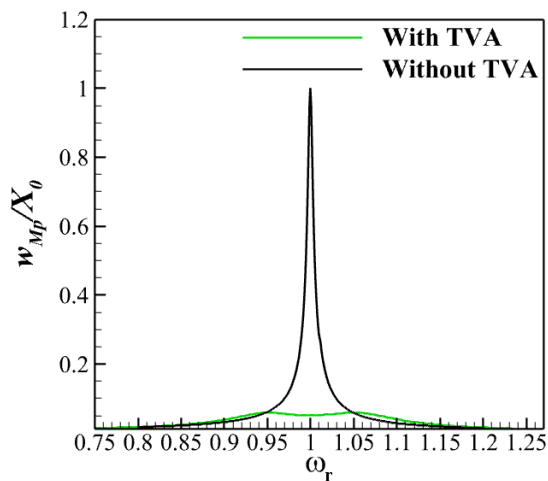
شکل ۵- مطالعات در خصوص شعاع کارآمد جاذب



شکل ۴- مقایسه تغییرات پاسخ بیشینه سازه اصلی با جرم صلب برای مقادیر مختلف ضخامت هسته



شکل ۶- تغییرات پاسخ بیشینه سازه اصلی با فاصله مرکز جرم صلب از خط میانی لایه بالای تیر



شکل ۷- پاسخ فرکانسی حول نقطه تشدید

مدول انباشت و ضریب اتلاف، دچار تغییرات قابل توجهی در اثر تغییرات دما می‌شوند. با توجه به این ویژگی ماده ویسکوالاستیک، تغییرات دما بر کارایی جاذب موثر خواهد بود و ممکن است جاذب ارائه شده در بخش قبل، در صورت تغییرات دما، کارآمد نباشد؛ لذا مطالعه در خصوص اثر تغییر دما بر کارایی جاذب اجتناب‌ناپذیر است. در این پژوهش، بازه دمایی عمل‌کرد قابل قبول جاذب طراحی شده ارائه شده است. نمودار الف و ب در شکل ۸ در این خصوص است. از نمودارهای الف و ب در شکل ۸ مشخص است که جاذب طراحی شده در دمای ۲۵ درجه سلیوس، در تغییرات دمایی  $\pm 20$  درجه نسبت به این دما کارایی بالای خود را از دست نمی‌دهد؛ اما در صورت تغییرات بیشتر دما، جاذب از حالت

پارامتر دیگری که در خصوص اثر آن در طراحی جاذب مطالعه صورت گرفت، فاصله مرکز جرم صلب از خط میانی لایه بالای تیر بود. نتایج مطالعات در خصوص این پارامتر در شکل ۶ ارائه شده است. همان‌طور که در نمودار شکل ۶ مشاهده می‌شود، با فاصله ۱۵ میلی‌متر کمینه پاسخ رخ داده است. در این نمودار، این کمیت با  $h_g$  نشان داده شده و نسبت به ضخامت لایه بالا بی‌بعدسازی صورت گرفته است. حال بر اساس مطالعات فوق مشخصات جاذب کارآمد در جدول ۴ ارائه شده است.

در ادامه، نمودار پاسخ فرکانسی حول نقطه‌ی تشدید برای سازه اصلی در حالت استفاده از جاذب و بدون آن جهت مقایسه در شکل ۷ ارائه شده است. محور افقی نمودار در این شکل، فرکانس تحریک بی‌بعد شده نسبت به فرکانس طبیعی سازه اصلی است. استفاده از این جاذب همان‌گونه که در شکل ۷ مشخص است، منجر به کاهش ۹۶٪ دامنه پاسخ فرکانسی سازه اولیه حول نقطه تشدید شده است. این قابلیت و مزایای دیگر مانند امکان بکارگیری در فضاهای محدود، امکان تغییر سفتی و فرکانس با تغییر میزان انحنای تیر نشان از کارایی بالای این جاذب دارد.

#### ۴-۳- بررسی صلابت کارایی جاذب تحت اثر دما

مطالعه روی پارامترهای موثر جهت طراحی جاذب کارآمد در بخش ۴-۲ در دمای ۲۵ درجه‌ی سلیوس صورت گرفت؛ اما با توجه به وابستگی حرکت مولکولی در پلیمرها به دما، مقادیر

جدول ۴- مشخصات جاذب کارآمد

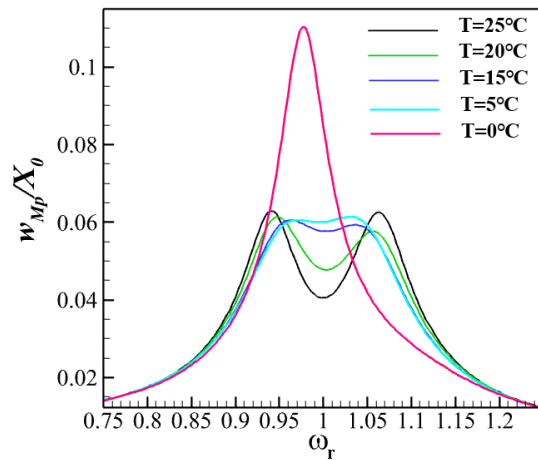
۵	ضخامت هسته (mm)
۱	ضخامت رویه‌ها (mm)
۲۰	عرض لایه‌ها (mm)
۵۰۰	شعاع انحنا (mm)
۱/۹۹۴	جرم صلب (kg)
ای‌اس‌دی ۱۱۲	جنس هسته
آلومینیوم	جنس رویه‌ها
۰/۲	نسبت جرمی (II)

برنولی مدل سازی شد. در مدل سازی اجزاء محدود برای تیر، المان یک بعدی سه گرهی مورد استفاده قرار گرفت. مطالعات پارامتریک مختلفی برای تعیین طرح کارآمد انجام گرفت که بر اساس مطالب ارائه شده در بخش ۴ جمع بندی موردی نتایج به شرح زیر است:

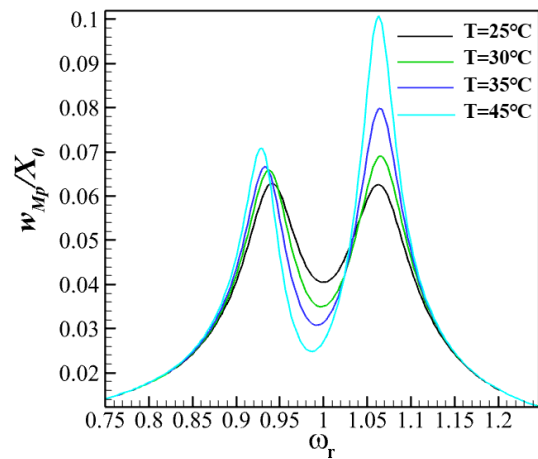
۱. جاذب ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک در کنترل ارتعاشات بسیار موثر بوده و امکان کاهش دامنه به میزان ۹۶ درصد با بکارگیری جاذب کارآمد معرفی شده در جدول ۳ وجود دارد.
۲. نمودارهای شکل ۳ نشان می دهد، جاذب در ضخامت های کم لایه های بالا و پائین کارآمدتر است. افزایش ضخامت رویه ها در کنار افزایش ضخامت هسته، موجب کاهش پاسخ می شود، اما با نسبت های جرمی بالا که این امر به علت کاهش فاصله فرکانس مود اول و دوم اتفاق می افتد، اما بنا به محدودیت های مهندسی معمولاً امکان انتخاب نسبت جرمی بیشتر از ۲٪ وجود ندارد.
۳. کاهش شعاع انحنا نیز منجر به کاهش پاسخ می شود، علت کاهش فاصله فرکانس مود اول و دوم است. البته این کاهش با افزایش میزان جرم صلب و در حقیقت با افزایش نسبت جرمی این رخ می دهد.
۴. جاذب طراحی شده در دمای ۲۵ درجه سلسیوس، همچنان کارایی خود را در صورت تغییرات ۲۰ درجه ای دما حفظ خواهد کرد.
۵. افزایش فاصله مرکز جرم صلب الحاقی از لایه بالا نیز می تواند تا اندازه ای منجر به بهبود عمل کرد جاذب شود که البته در تنظیم آن باید احتیاط کرد؛ چرا که افزایش بیش از حد این فاصله، عمل کرد جاذب را مختل خواهد کرد.

#### ۶- فهرست علائم

شعاع لایه بالا	$r_t$
شعاع لایه پائین	$r_b$
شعاع هسته	$r$
طول کمان	$s$



(الف)



(ب)

شکل ۸- اثر تغییر دما بر عملکرد جاذب؛ (الف) کاهش دما و (ب) افزایش دما

کارآمد دور شده است؛ لذا پیشنهاد ارائه دهندگان پژوهش حاضر، استفاده از این جاذب در بازه دمایی ۵ تا ۴۵ درجه سلسیوس است.

#### ۵- نتیجه گیری

در این تحقیق میزان کارایی جاذب ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک و لایه های مقیدکننده الاستیک در کنترل ارتعاشات سازه های مهندسی مطالعه شد. در ساختار جاذب از تیر خمیده ساندویچی استفاده شد. هسته با نظریه مرتبه بالای برشی و بدون در نظر گرفتن کرنش راستای ضخامت مدل شد. رویه ها نیز با نظریه مرتبه اول معادل تیر اویلر-

external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn* 86: 1761-1795.

[۳] ابراهیمی ممقانی علی، سپرست هدا (۱۳۹۷) انتقال هدفمند انرژی از تیر دوسرگیردار تحت تحریک هارمونیک خارجی به چاه غیرخطی انرژی. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۷۷-۱۶۵: ۸(۴).

[۴] حسینی کردخیلی سع، خراسانی ر (۱۳۹۵) استخراج تجربی خواص ارتعاشی- میرایی یک ماده‌ی ویسکوالستیک خاص. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۷۱-۱۶۱: ۶(۴).

[5] Batou A, Adhikari S (2019) Optimal parameters of viscoelastic tuned-mass dampers. *J Sound Vib* 445: 17-28.

[6] Verstraelen E, Habib G, Kerschen G, Dimitriadis G (2016) Experimental passive flutter mitigation using a linear tuned vibrations absorber. *AIAA J* 55(1): 1-16.

[7] Huang SC, Lin KA (2014) A new design of vibration absorber for periodic excitation. *Hindawi Shock and Vibration*, Article ID 571421.

[8] Wang PW, Cheng CC (2007) A design methodology for multiple tonal beam-type vibration absorber. *Noise Vib Worldw* 38(10): 11-16.

[9] Brennan MJ (2006) Some recent developments in adaptive tuned vibration absorbers. *Institute of Sound and Vibration Research* 13(4-5): 531-543.

[10] Rustighi E, Brennan MJ (2005) Optimal parameters of viscoelastic tuned-mass dampers. A shape memory alloy adaptive tuned vibration absorber: design and implementation. *Smart Mater Struct* 14(1): 19-28.

[11] Hua Y, Wong W, Cheng L (2018) Optimal design of a beam-based dynamic vibration absorber using fixed-points theory. *J Sound Vib* 421: 111-131.

[12] Jem K (1959) Damping of flexural waves by constrained viscoelastic layer. *J Acoust Soc Am* 31(7): 952-962.

[13] Mace M (1994) Damping of beam vibrations by means of a thin constrained viscoelastic layer: evaluation of a new theory. *J Sound Vib* 172(5): 577-591.

[14] Arvin H, Sadighi M, Ohadi AR (2010) A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core. *Compos Struct* 92(4): 996-1008.

[15] Hirunyapruk C, Brennan MJ, Mace BR, Li WH (2010) A tunable magneto-rheological fluid-filled beam-like vibration absorber. *Smart Mater Struct* 19(5): 055020.

طول جرم صلب	$L_{rm}$
فاصله مرکز جرم صلب از خط میانی لایه بالای تیر	$h_g$
ضخامت لایه بالا	$h_t$
ضخامت لایه پائین	$h_b$
ضخامت هسته	$h_c$
عرض تیر	$b$
طول تیر	$L$
مدول برشی انباشت	$G$
دمای محیط بر حسب فارنهایت	$T$
طول المان	$L_e$
سفتی فنر	$k$
جابجایی سازه‌ی اصلی	$w_p$
جرم سازه‌ی اصلی	$M_p$
ممان اینرسی جرم صلب	$I_{rm}$
اندازه‌ی جرم صلب	$M_{rm}$
سرعت جرم صلب	$v_{rm}$
<b>علائم یونانی</b>	
زاویه‌ی کمان	$\varphi$
فرکانس تحریک بر حسب هرتز	$\omega$
چگالی لایه‌ی بالا	$\rho_t$
چگالی لایه‌ی پائین	$\rho_b$
چگالی هسته	$\rho_c$
میرایی	$\eta$
نسبت جرم جاذب به جرم سازه اصلی	$\mu$

## ۷- مراجع

[۱] کریم‌پور ب، کیهانی ع، علامتیان ج (۱۳۹۲) شیوه نوین برای پایش و کنترل نوسان‌های سازه‌های هوشمند با چندین حسگر و عملگر. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۹-۱: ۳(۴).

[2] Ebrahimi-Mamaghani A, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under

- constrained viscoelastic layer. *Compos Struct* 92(2): 233-243.
- [20] Bozhevolnaya E, Sun JQ (2013) Free Vibration Analysis of Curved Sandwich Beams. *J Sandw Struct* 6: 47-72.
- [۲۱] آشنای قاسمی ف، ملکزاده فرد ک، خلیلی مع (۱۳۹۴) پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی خمیده دارای هسته انعطافپذیر تحت ضربه شعاعی با سرعت پایین. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها ۲۹-۱۳: ۵(۱).
- [22] Drake ML (1989) Damping properties of various materials. University of Dayton Research Institute.
- [16] Saidi I, Gad EF, Wilson JL, Haritos N (2011) Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations. *Eng Struct* 33(12): 3317-3328.
- [17] Yang YB, Asce AM (1998) Effect of curvature on stability of curved beams. *J Struct Eng* 113(6): 1185-1202.
- [18] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads. *Compos Struct* 226: 111262.
- [19] Kumar N, Singh SP (2010) Experimental study on vibration and damping of curved panel treated with