



اثر کنترل کننده فیدبک حالت در رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های مغناطیسی فعال

محسن دهداری^۱ و مصطفی نصیری^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۸

چکیده

رفتار دینامیکی یک روتور جفکات افقی با یاتاقان‌های مغناطیسی فعال چهار قطبی بررسی می‌شود. نیروی مغناطیسی تولیدی توسط قطب‌های مغناطیسی تابعی غیرخطی از جریان‌های عبوری از سیم‌پیچ‌ها و فاصله هوایی موجود در بین قطب‌ها و روتور است؛ همچنین رفتار غیرخطی سیستم در حضور نیروهای ایجاد شده توسط یاتاقان‌های مغناطیسی فعال با در نظر گرفتن نیروی گریز از مرکز و نیروی وزن بررسی شده است. برای کنترل نوسانات روتور از یک کنترل کننده فیدبک حالت استفاده شده است. ارتعاشات روتور با استفاده از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دو با عوامل غیرخطی مربعی و مکعبی مدل‌سازی شده است. با فرض عوامل غیرخطی ضعیف و تحریک نرم، از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات دیفرانسیل اغتشاشی استفاده شده است و نمودارهای فرکانسی بدست آمده است. برای اعتبارسنجی حل تحلیلی از روش عددی نیز استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که طراحی یاتاقان‌ها با ضریب سرعت بالاتر می‌تواند باعث کاهش اثر عوامل غیرخطی و کاهش دامنه ارتعاشات شود.

کلمات کلیدی: رفتار دینامیکی؛ یاتاقان مغناطیسی فعال؛ کنترل کننده فیدبک حالت؛ مقیاس چندگانه.

Effect of State Feedback Controller on Dynamic Behavior of a Rotor Supported by Active Magnetic Bearings

M. Dehdari¹, M. Nasiri^{2,*}

¹ M.Sc. Student, Mechanical Engineering Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Iran.

² Assistant Professor, Mechanical Engineering Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Iran.

Abstract

Dynamic behavior of a horizontally supported Jeffcott-rotor system via four electromagnetics poles is investigated. The magnetic force has a highly nonlinear relation to the control current and the air gap in the active magnetic bearing. The nonlinearities due to the centrifugal force, electromagnetic force, and the rotor weight are considered in the rotor model. The lateral oscillation of the rotor is controlled using a state feedback control system. The vibration of the rotor is modeled by a second order nonlinear ordinary differential equations with quadratic and cubic nonlinearities. The oscillatory characteristics of the considered system is investigated using the multiple time scales perturbation method assuming weak nonlinearity and soft excitation. Numerical simulations are carried out to validate the accuracy of the analytical results. The results show high efficiency of the applied controller velocity gain in forcing the considered nonlinear system to respond as a linear one with a single periodic attractor.

Keywords: Dynamic Behavior; Active Magnetic Bearing; State Feedback; Multiple Scale.

۱- مقدمه

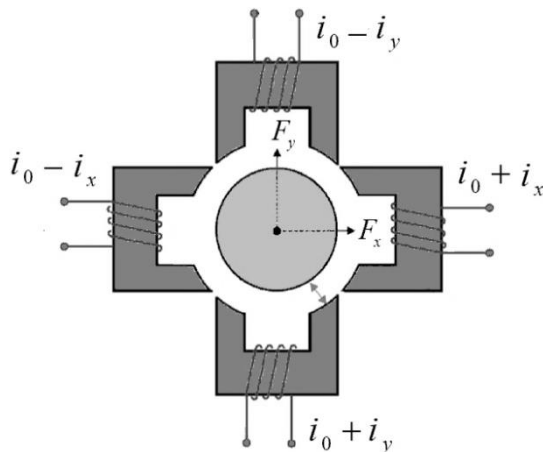
ماشین‌های دوار نقش مهمی در صنایع مدرن به علت کاربردهای وسیع خود دارند. وجود ارتعاشات در ماشین‌های دوار یک پدیده غیرقابل اجتناب بوده که می‌تواند در نهایت منجر به از کارافتادگی ماشین و حوادث پرخطر شود. اگر محورهای اصلی ممان اینرسی بر محور دوران منطبق نباشد، نامیزانی در محور دوران ایجاد شده و نوسانات ناخواسته باعث تماس دینامیکی استاتور و اجزای دوار می‌شود. ارتعاشات غیرخطی یک پدیده ذاتی بوده و باعث عدم اطمینان، کاهش طول عمر و عملکرد نامن ماشین‌های دوار می‌شود. بنابراین تحلیل ارتعاشی و کنترلی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته و تلاش‌های زیادی برای کاهش ارتعاشات ماشین‌های دوار انجام شده است.

یاتاقان‌های مغناطیسی فعال یک نیروی مغناطیسی با استفاده از میدان مغناطیسی برای جلوگیری از نوسانات ناخواسته در قسمت‌های دوار ایجاد می‌کند. از مزایای مهم یاتاقان‌های فعال این است که بین یاتاقان و قسمت‌های دوار تماس وجود ندارد و سایش مکانیکی و همچنین روغنکاری در حین کار وجود ندارد. در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال، سنسورهایی برای اندازه‌گیری جابجایی و سرعت روتور وجود دارد. کنترل‌کننده با استفاده از خروجی سنسورها و الگوریتم کنترلی خود، سیگنال کنترلی لازم را ایجاد می‌کند. یک تقویت‌کننده جریان کنترلی لازم را با استفاده از سیگنال کنترلی برای ایجاد نیروی مغناطیسی لازم ایجاد می‌کند تا روتور نوسانات کمتری حول نقطه مرجع داشته باشد. الگوریتم کنترلی وظیفه پایداری و ایجاد سختی و میرایی لازم برای نوسانات روتور را بر عهده دارد.

در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال، نیرو در یاتاقان با استفاده از یک کنترل‌کننده جریان ورودی به قطب‌های یاتاقان تنظیم شده و در نتیجه ارتعاشات روتور کنترل می‌شود. نیرویی که این یاتاقان‌ها برای شناور کردن روتور ایجاد می‌کنند، غیرخطی و تابعی از موقعیت و سرعت روتور است. تاکنون روش‌های کنترلی مختلفی برای کاهش ارتعاشات غیرخطی ماشین‌های دوار با یاتاقان مغناطیسی فعال انجام شده است.

کنترل‌کننده‌های تناسبی-مشتقی به طور گسترده برای کنترل ارتعاشات یاتاقان‌های مغناطیسی فعال استفاده شده است.

حیدری و یوسفوند [۱]، با استفاده از مدل فضای حالت و روش فیدبک حالت به کنترل ارتعاشات یک یاتاقان مغناطیسی فعال پرداخته‌اند. دشتی و همکاران [۲]، پارامترهای موثر بر عملکرد و طراحی سیستم روتور یک یاتاقان مغناطیسی فعال را بررسی نموده‌اند و حل مسئله کنترل بهینه با افق متناهی به کمک توابع متعامد لژاندر توضیح داده شده است. گوهری [۳] با ترکیب الگوریتم مشاهده‌گر اغتشاش و کنترل‌کننده متعارف تناسبی-مشتقی، به بهبود عملکرد یاتاقان مغناطیسی فعال پرداخته‌اند. سعید و کامل [۴ و ۵] از یک کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی برای کنترل ارتعاشات جانبی روتور جفکات که بر پایه چهار قطب الکترومغناطیسی است، استفاده کردند. آنها همچنین رفتار دینامیکی سیستم غیرخطی روتور جفکات افقی با یک کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی با تأخیر در زمان را بررسی کردند و امکان استفاده از تاخیرهای زمانی را برای بهبود کارایی کنترل‌کننده نشان دادند [۶]. یانگ و همکاران [۷] از روش غیرخطی تطبیقی بازگشتی برای کنترل ارتعاشات یاتاقان‌های مغناطیسی فعال با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های ناشی از تغییر هندسه و خواص وابسته به شرایط مواد استفاده کردند. روش غیرخطی کنترل مد لغزشی نیز به طور وسیع برای کنترل ارتعاشات و جلوگیری از لرزش‌های فرکانس بالا در نوسانات یاتاقان‌های مغناطیسی فعال استفاده شده است [۸،۹]. در سال‌های اخیر از روش‌های کنترل پیش‌بین بر مبنای مدل نیز به کنترل ارتعاشات یاتاقان‌های مغناطیسی فعال پرداخته شده است [۱۰ و ۱۱]. علاوه بر این، ترکیب روش‌های فازی و عصبی نیز می‌تواند تأثیر زیادی در بهبود عملکرد یاتاقان‌های مغناطیسی فعال داشته باشد [۱۲ و ۱۳]. روتورهای نامتقارن به صورت یک مدل خطی با ضرایب متغیر با زمان، مدل‌سازی می‌شوند. مدل متغیر با زمان با استفاده از تبدیل مختصات، به یک مدل دینامیکی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود [۱۴]. عدم تقارن یاتاقان نیز می‌تواند در پایداری سیستم تأثیرگذار باشد. ناپایداری ناشی از عدم تقارن یاتاقان و روتور مستقل از یکدیگر هستند [۱۵]. در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال، وجود یاتاقان‌های کمکی می‌تواند در رفتار دینامیکی روتور بسیار تأثیرگذار باشد. هالمنین و همکاران [۱۶]، دینامیک روتور با یاتاقان‌های مغناطیسی و کمکی هنگام تماس محور با یاتاقان‌های



شکل ۱- مجموعه روتور و نیروی الکترومگنت ها

$$\frac{F_y}{F_e} = \frac{(1 + \frac{i_0 + i_y}{I_0})^2}{(1 - \frac{\bar{y}}{C_0})^2} - \frac{(1 - \frac{i_0 + i_y}{I_0})^2}{(1 + \frac{\bar{y}}{C_0})^2} \quad (2)$$

که F_e بیانگر ثابت نیرو بوده و به صورت زیر بدست می‌آید.

$$F_e = \frac{\mu_0 AN^2 I_0^2}{4C_0} \cos \alpha \quad (3)$$

جریان بایاس لازم برای نگهداری وزن روتور در راستای y با قرار دادن $y=0$ و جریان کنترلی $i_y=0$ در معادله ۲ بدست می‌آید.

$$i_0 = \frac{mgI_0}{4F_e} \quad (4)$$

برای اینکه تابع نیرویی الکترومگنت‌ها که ترم‌های کسری و غیرخطی دارد یک تابع هموار باشد، از تقریب‌های مرتبه اول بسط تیلور استفاده می‌شود.

$$\frac{F_x}{F_e} = -\left(1 + \frac{i_x}{I_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2\bar{x}}{C_0}\right) + \left(1 - \frac{i_x}{I_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2\bar{x}}{C_0}\right) \quad (5)$$

$$\frac{F_y}{F_e} = -\left(1 + \frac{i_0 + i_y}{I_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2\bar{y}}{C_0}\right) + \left(1 - \frac{i_0 + i_y}{I_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2\bar{y}}{C_0}\right) \quad (6)$$

جریان‌های i_x و i_y توسط کنترل کننده فیدبک حالت کنترل می‌شوند و بنابراین جریان کنترلی در راستای x و y به صورت

کمکی مورد بررسی قرار گرفته است. در مطالعات مربوط به دینامیک غیرخطی روتور، عموماً روتور به صورت صلب در نظر گرفته شده است. در ماشین‌های دوار، انعطاف‌پذیری روتور در رفتار دینامیکی سیستم و فرکانس‌های طبیعی تأثیر گذار است. یو و همکاران [۱۷] رفتار دینامیکی عمومی یک روتور انعطاف پذیر و نامتقارن را مطالعه کردند. آنها نشان دادند که سیستم مورد مطالعه می‌تواند حرکت آشوب داشته باشد.

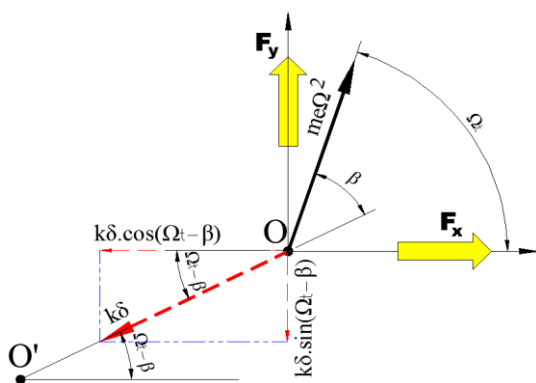
در این مقاله، کنترل ارتعاشات غیرخطی یک روتور دوار با تکیه‌گاه‌های افقی و با استفاده از کنترل کننده فیدبک حالت بررسی شده است. یک سیستم غیرخطی دو درجه آزادی و دارای تحریک خارجی و چند پارامتری ایجاد شده است. بر این تقارن ناشی از نیروی وزن در نظر گرفته شده است. بر این اساس، یک کنترل کننده فیدبک حالت از طریق چهار قطب الکترومغناطیسی در سیستم در نظر گرفته شده است. مدل ریاضی سیستم با کنترل کننده استخراج شده و سپس با استفاده از روش مقیاس چندگانه تجزیه و تحلیل می‌شود. کارایی کنترل کننده اعمال شده با بررسی حساسیت سیستم به ضرایب کنترل کننده فیدبک حالت بررسی می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که طراحی یاتاقان‌ها با ضریب سرعت بالاتر می‌تواند به کاهش ارتعاشات بوجود آمده در سرعت‌های بالا کمک کند.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در روتور جفکات، روتور انعطاف پذیر بوده و یک دیسک صلب روی آن قرار گرفته است. با در نظر گرفتن چهار قطب الکترومغناطیسی مطابق شکل ۱ برای یاتاقان مغناطیسی فعال که دارای جریان بایاس و جریان کنترلی در راستای x و y است، معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت به دست آورده شد؛ همچنین نیروهای ناشی از نامیزانی، نیروی وزن و نیروی ناشی از فنریت روتور در نظر گرفته شده است.

نیروهای وارد شده از طرف الکترومگنت‌ها بر روی روتور در راستای x و در راستای y به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۱۸].

$$\frac{F_x}{F_e} = \frac{(1 + \frac{i_x}{I_0})^2}{(1 - \frac{\bar{x}}{C_0})^2} - \frac{(1 - \frac{i_x}{I_0})^2}{(1 + \frac{\bar{x}}{C_0})^2} \quad (1)$$



شکل ۲- نیروهای دینامیکی و نیروهای الکترومگنت

$$x = \frac{\bar{x}}{C_0} \quad y = \frac{\bar{y}}{C_0}$$

$$i_x = \frac{\bar{i}_x}{I_0} \quad i_y = \frac{i_0 + \bar{i}_y}{I_0}$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{B}}{2} \bar{\Omega}_2 t \quad t = \frac{\sqrt{B}}{2} \bar{t} \quad E = \frac{e}{C_0} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\sqrt{B}}{2} \frac{d}{d\bar{t}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{B}{4} \frac{d^2}{d\bar{t}^2} \quad (15)$$

با جایگذاری پارامترهای بدون بعد، معادلات حرکت در راستای x و y به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x + 2\mu\dot{x} + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 \dot{x}x^2 + \alpha_3 x\dot{x}^2 = E\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (16)$$

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y + 2\mu\dot{y} + \beta_1 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^2 \dot{y} + \beta_4 y \dot{y} + \beta_5 y \dot{y}^2 + \beta_6 = E\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (17)$$

ضرایب معادلات حاکم روتور در جدول ۱ و ۲ آورده شده است. این معادلات حرکت به دلیل غیرخطی بودن حل تحلیلی ندارد و برای حل آنها باید از روش‌های عددی استفاده کرد. برای حل تحلیلی با استفاده از ارتعاشات غیرخطی و با بهره‌گیری از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه در حالت غیرخطی ضعیف به حل معادلات پرداخته می‌شود.

عوامل غیرخطی و همچنین میرایی سیستم به صورت غیرخطی ضعیف در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور باید عوامل مربوطه را در عدد E، که عددی مثبت و بسیار کوچکتر از ۱ است ($0 \ll E \ll 1$) ضرب کرد. معادله راستای x به دلیل داشتن تنها عوامل غیرخطی مرتبه فرد، جملات غیرخطی

زیر هستند. ضرایب کنترل کننده فیدبک حالت، با استفاده از روش بهینه LQR بدست آمده است.

$$i_x = K_x \mathbf{X} = \begin{bmatrix} k_p & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$i_y = K_y \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} k_p & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

که بردارهای X و Y بیانگر بردارهای حالت سیستم و ماتریس‌های K_x و K_y بیانگر ماتریس ضرایب کنترل کننده فیدبک حالت هستند. ضرایب کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از حل معادله ریکاتی در LQR به گونه‌ای بدست می‌آید که تابع هزینه ارائه شده در رابطه (۹) کمینه شود.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt \quad (9)$$

که Z بیانگر بردار متغیرهای حالت سیستم و U نشان دهنده بردار ورودی‌های سیستم است.

حال به بررسی نیروهای دینامیکی ناشی از نامیزانی و نیروی ناشی از انعطاف‌پذیری روتور پرداخته می‌شود. ضریب سختی روتور با در نظر گرفتن روتور به صورت تیر دو سر گیردار به صورت زیر بدست می‌آید [۱۹].

$$K_s = \frac{48E_s I_s}{L_s^3} \quad (10)$$

مرکز هندسی روتور به اندازه δ از مبدا مختصات جابجا گردیده است، این مقدار جابجایی به علت وجود نیروهای ناشی از نامیزانی است که تمایل دارند، روتور را از مبدا مختصات دور کنند. در نهایت با توجه به شکل ۲، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم با استفاده از نیروهای الکترومگنت‌ها و نامیزانی و نیروی ناشی از انعطاف‌پذیری روتور در راستای x و y بدست می‌آید. مقدار جابجایی x و y بر حسب δ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\bar{x} = \delta \cos(\Omega t - \beta) \quad (11)$$

$$\bar{y} = \delta \sin(\Omega t - \beta) \quad (12)$$

برای بی‌بعد سازی معادلات، پارامتر B به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$B = \frac{4F_e}{mC_0} \quad (13)$$

بنابراین تغییر متغیرها به صورت روابط ۱۴ و مشتقات زمانی جدید با استفاده از روابط ۱۵ بدست می‌آید.

$$y(t, \varepsilon, \varepsilon^2 t) = y_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon y_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (21)$$

معادلات مرتبه $O(\varepsilon^0)$ در هر دو راستای x و y ، به فرم مختلط زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0\omega_x} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0\omega_x} \quad (22)$$

$$y_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)e^{iT_0\omega_y} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0\omega_y} \quad (23)$$

با توجه به غیرخطی بودن معادلات، علاوه بر فرکانس اصلی حاصل از سیستم خطی که آن را اصطلاحاً رزونانس اولیه می‌نامند، فرکانس‌های دیگری نیز بدست می‌آیند که با عنوان رزونانس‌های ثانویه شناخته می‌شود. برای تحلیل این فرکانس‌ها، با تعریف پارامتر تنظیم σ ، فرکانس تحریک را برابر با جمع فرکانس اصلی و پارامتر تنظیم در نظر گرفته و رفتار سیستم غیرخطی در عبور از قله بررسی می‌شود.

$$\Omega = \omega_x + \varepsilon\sigma_x \quad (24)$$

$$\Omega = \omega_y + \varepsilon^2\sigma_y \quad (25)$$

برای حل خصوصی معادله دیفرانسیل مربوط به مقیاس زمانی T_0 ، زمانی که فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس تحریک برابر شود با گذشت زمان دامنه آنها زیادتر می‌شود و اصطلاحاً پاسخ سیستم شروع به رشد می‌کند و پاسخ‌های غیرپریودیک و غیرنوسانی ایجاد می‌شود. با توجه به اینکه پاسخ‌های با دامنه محدود مورد قبول است، لذا باید ضریب این گونه جملات که به جملات سکولار معروف هستند، برابر صفر شود. در نهایت با فرض حالت پایا که تغییرات دامنه و فاز وجود ندارد، رابطه فرکانس تنظیم بر حسب دامنه و فاز در راستای x نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_x = \frac{1}{\omega_x a} \left(\frac{1}{8} A \pm \sqrt{B} \right) \quad (26)$$

$$\tan\gamma_x = C/D \quad (27)$$

که مقادیر A ، B ، C و D به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$A = \alpha_3 \omega_x^2 a^3 + 3\alpha_1 a^3$$

$$B = -\alpha_2^2 \omega_x^2 a^6 - 16\mu\alpha_2 \omega_x^2 a^4 - 64\mu^2 \omega_x^2 a^2$$

$$C = \omega_x (\alpha_2 a^2 + 8\mu)$$

$$D = \alpha_3 \omega_x^2 a^2 + 3\alpha_1 a^2 - 8\omega_x \sigma_x \quad (28)$$

رابطه فرکانس تنظیم بر حسب دامنه و فاز در راستای y نیز به صورت زیر بدست می‌آید.

حاصل از میرایی و نیروی وزن از مرتبه اول $O(\varepsilon)$ در نظر گرفته می‌شود. ولی در معادله راستای y ، عوامل غیرخطی زوج و فرد وجود دارد. بنابراین جملات غیرخطی فرد ناشی از میرایی و نیروی وزن از مرتبه دوم $O(\varepsilon^2)$ و جملات غیرخطی زوج از مرتبه اول $O(\varepsilon)$ در نظر گرفته می‌شوند [۲۰].

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x + 2\varepsilon\mu\dot{x} + \varepsilon\alpha_1 x^3 + \varepsilon\alpha_2 \dot{x}x^2 + \varepsilon\alpha_3 x\dot{x}^2 = \varepsilon E \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (18)$$

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y + 2\varepsilon^2\mu\dot{y} + \varepsilon^2\beta_1 y^3 + \varepsilon\beta_2 y^2 + \varepsilon^2\beta_3 y^2\dot{y} + \varepsilon\beta_4 y\dot{y} + \varepsilon^2\beta_5 y\dot{y}^2 + \varepsilon\beta_6 = \varepsilon^2 E \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (19)$$

جدول ۱- ضرایب معادله ۱۸

ω_x^2	$\frac{k_s C_0}{F_e} + 4k_p + 4$
α_1	$4k_p^2$
α_2	$8k_d k_p$
α_3	$4k_d^2$
μ	$2k_d$

جدول ۲- ضرایب معادله ۱۹

ω_y^2	$\frac{k_s C_0}{F_e} + 4i_y^2 + 4k_p + 4$
β_1	$4k_p^2$
β_2	$8k_p i_y$
β_3	$8k_d k_p$
β_4	$8k_d i_y$
β_5	$4k_d^2$
β_6	$4i_y$

با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله ۱۸ با استفاده از دو مقیاس زمانی (T_0, T_1) و معادله ۱۹ به دلیل داشتن ضرایب غیرخطی مرتبه فرد و زوج با استفاده از سه مقیاس زمانی (T_0, T_1, T_2) حل شده‌اند.

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (20)$$

ابتدا نمودارهای فرکانسی شامل دامنه و فاز بر حسب فرکانس تنظیم در جهت افقی مطابق شکل ۳ رسم شده است. در این نمودار اگر فرکانس تحریک از مقدار منفی شروع به افزایش یابد، دامنه هم افزایش یافته تا در نقطه A کاهش ناگهانی دامنه و یا پدیده پرش به پایین اتفاق می‌افتد. بنابراین در نقطه A، یک جهش در دامنه به صورت کاهش به نقطه B مشاهده می‌شود و پس از نقطه B، با افزایش فرکانس، دامنه کاهش می‌یابد. حال اگر فرکانس تحریک از مقدار مثبت شروع به کاهش یابد، دامنه افزایش پیدا می‌کند تا در نقطه C یک جهش ناگهانی در دامنه به سمت D و یا پدیده پرش به بالا اتفاق می‌افتد. پس از نقطه D، با کاهش فرکانس، دامنه کاهش می‌یابد. در قله این نمودار، نقاط A و C بیانگر نقاط زینی هستند. قسمت A تا C بیانگر منطقه ناپایدار و بقیه نقاط روی منحنی پایدار می‌باشد. در بین فاصله دو پرش A تا C، سه جواب برای دامنه وجود دارد که دو جواب آن پایدار و یک جواب آن ناپایدار است. در نمودارهای فاز بر حسب فرکانس تنظیم در جهت افقی در شکل ۳ نیز پدیده‌های پرش به بالا، پرش به پایین و خطوط پایدار و ناپایدار مشاهده می‌شود؛ همچنین در بین فاصله دو پرش، سه جواب برای فاز وجود دارد که دو جواب آن پایدار و یک جواب آن ناپایدار است.

نمودارهای دامنه و فاز بر حسب فرکانس تنظیم بر اثر تغییر ضریب مشتقی کنترل کننده (k_d) در شکل ۴ نشان

$$\sigma_y = \frac{1}{\omega_y^3 b} \left(\frac{1}{24} A' \pm \frac{1}{8} \sqrt{B'} \right) \quad (29)$$

$$\tan \gamma_y = C'/D' \quad (30)$$

که مقادیر A' ، B' ، C' و D' به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$A' = 3\beta_5 \omega_y^4 b^3 - \beta_4^2 \omega_y^2 b^3 + 9\beta_1 \omega_y^2 b^3 - 2\beta_2^2 b^3 - 24b\beta_2\beta_6$$

$$B' = \beta_3^2 \omega_y^6 b^6 + 2\beta_2\beta_3\beta_4 \omega_y^4 b^6 - \beta_2^2 \beta_4^2 \omega_y^2 b^6 - 16\mu\beta_3 \omega_y^6 b^4 + 16\mu\beta_2 \omega_y^4 b^4 + 8\beta_3\beta_4\beta_6 \omega_y^4 b^4 - 8\beta_2\beta_4^2 \beta_6 \omega_y^2 b^4 - 64\mu^2 \omega_y^6 b^2 + 16e^2 \omega_y^8$$

$$+ 64\mu\beta_4\beta_6 \omega_y^4 b^2 - 16\beta_4^2 \beta_6^2 \omega_y^2 b^2$$

$$C' = 3\beta_5 \omega_y^4 b^2 - \beta_4^2 \omega_y^2 b^2 + 9\beta_1 \omega_y^2 b^2$$

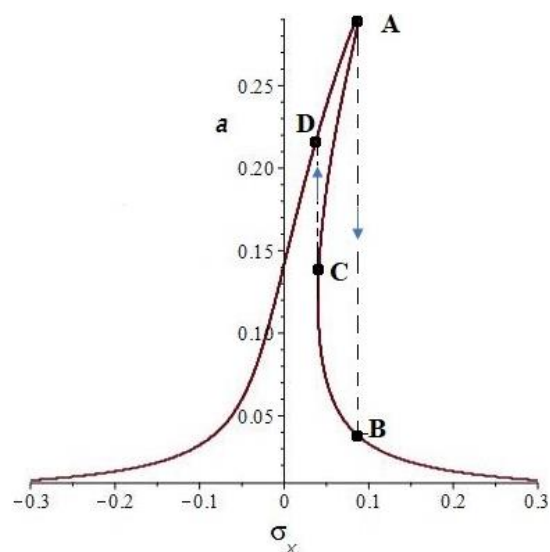
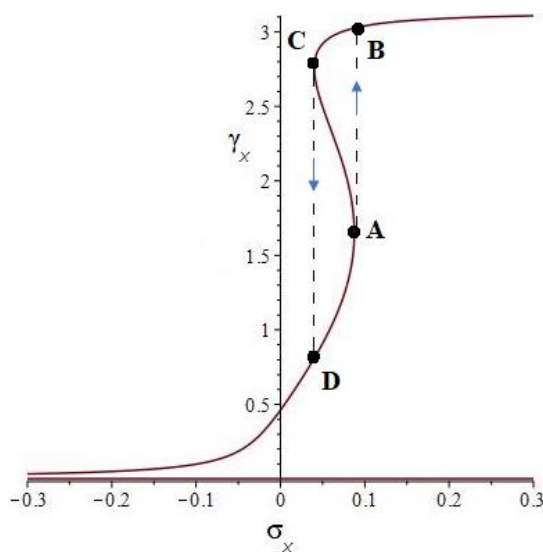
$$- 10\beta_2^2 b^2 - 24\omega_y^3 \sigma_y - 24\beta_2\beta_6$$

$$D' = -3\beta_3 \omega_y^3 b^2 + 3b^2 \beta_2 \beta_4 \omega_y - 24\mu \omega_y^3$$

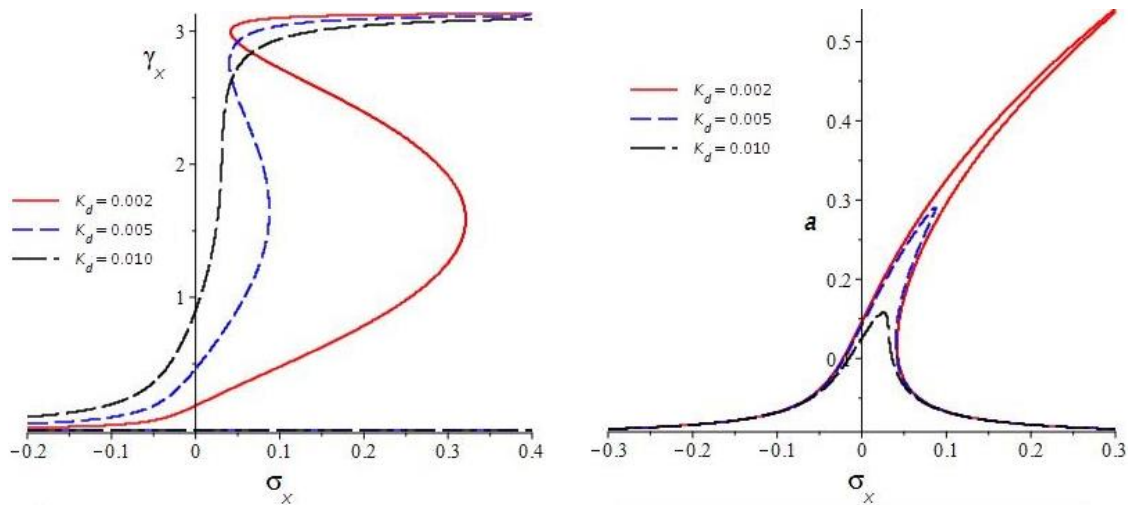
$$+ 12\beta_4\beta_6 \omega_y \quad (31)$$

۳- نتایج

در این بخش، ارتعاشات روتور جفکات در دو جهت افقی (x) و جهت عمودی (y) بررسی شده و نمودارهای فرکانسی ارائه می‌شود. در نتایج بدست آمده از مقادیر پارامترهای زیر استفاده می‌شود.



شکل ۳- دامنه و فاز نوسان‌های افقی



شکل ۴- تاثیر ضریب سرعت کنترل کننده در دامنه و فاز نوسان های افقی

در شکل ۹ اثر تغییر فرکانس تحریک در دامنه نوسانات افقی و عمودی نشان داده شده است. با در نظر گرفتن چند فرکانس تنظیم مختلف، نمودارهای دامنه بر حسب فرکانس تحریک نشان داده شده است. در نوسانات افقی و در فرکانس های تنظیم پایین، رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک تر است. با افزایش فرکانس تنظیم، رفتار سیستم از حالت خطی خارج شده و پدیده های پرش مشاهده می شود. با استفاده از نمودارهای فرکانسی، فرکانس تنظیم در بین دو نقطه زینی که دارای خطوط پایدار و ناپایدار هستند انتخاب شده است. با این انتخاب، سه جواب برای دامنه و فاز وجود دارد که دوتای آن پایدار و یک جواب آن ناپایدار است. نمودارهای پاسخ زمانی حالت گذرا توسط حل تحلیلی در شکل ۱۰ با استفاده از دو جواب پایدار برای دامنه و فاز رسم شده است و با نمودارهای پاسخ زمانی توسط حل عددی مقایسه و ارزیابی شده است.

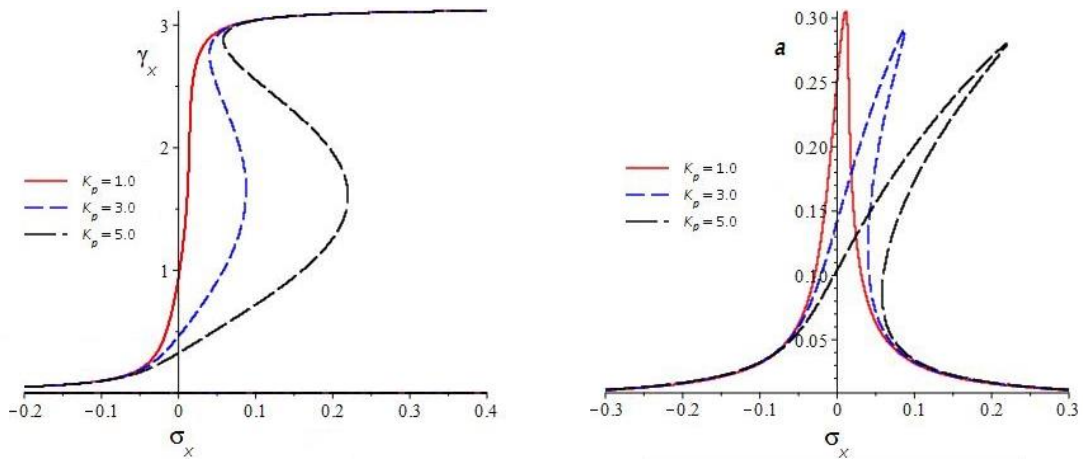
با توجه به اینکه معادلات سیستم غیرخطی ضعیف است، تنها فرکانس های طبیعی سیستم تحریک شده است و نتایج به دست آمده حاکی از آن است که دامنه پاسخ سیستم به صورت نوسانی و پایدار است و در حالت دامنه و فاز دوم، پاسخ های عددی و تحلیلی، رفتار مشابه تری از خود نشان می دهد. نمودارهای دیاگرام فاز با استفاده از دامنه و فاز دوم در راستای x و y در شکل ۱۱ رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود، نمودارهای فازی به سمت یک چرخه

داده شده است. ضریب مشتقی کنترل کننده رابطه مستقیم با میرایی سیستم (μ) دارد؛ بنابراین با افزایش ضریب مشتقی کنترل کننده، دامنه نوسانات کاهش پیدا می کند.

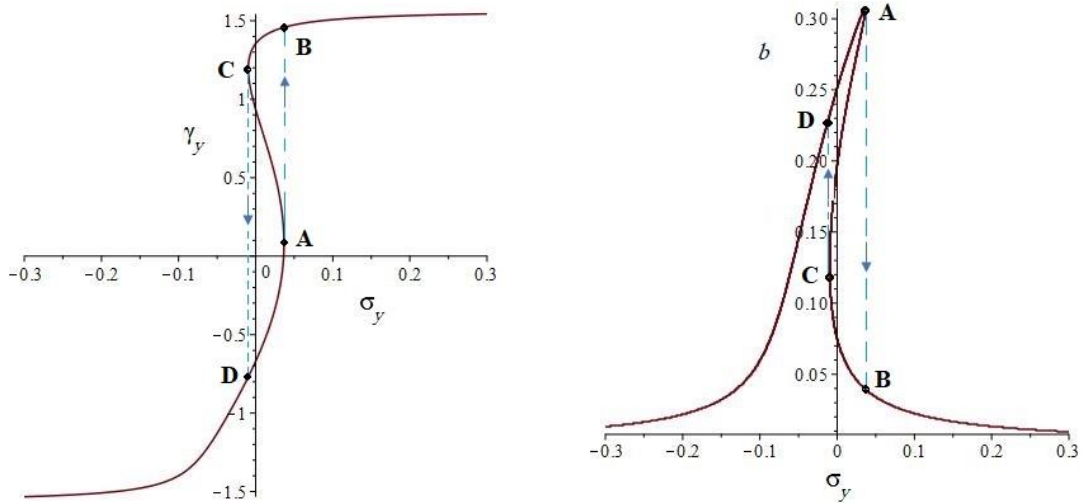
نمودارهای دامنه و فاز بر حسب فرکانس تنظیم به ازای ضرایب مختلف کنترل تناسبی (K_p) در شکل ۵ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، با کاهش ضریب تناسبی، رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک می شود. با افزایش ضریب تناسبی، رفتار سیستم از حالت خطی خارج می شود. با دور شدن از رفتار خطی، منحنی های دامنه به سمت راست خمیده شده و پدیده های غیرخطی پرش به بالا و پایین ظاهر می شود.

نمودارهای فرکانسی شامل دامنه و فاز بر حسب فرکانس تنظیم در جهت عمودی نیز در شکل های ۶ تا ۸ رسم شده است. در جهت عمودی، پدیده پرش به پایین در فرکانس های تنظیم مثبت و پدیده پرش به بالا در فرکانس های تنظیم منفی ایجاد شده است. در حالی که در جهت افقی، هر دو پرش در فرکانس های تنظیم مثبت اتفاق می افتد. علاوه بر این، دامنه نوسانات در جهت عمودی بیشتر از دامنه نوسانات در جهت افقی است. نتایج نشان می دهد که با افزایش ضریب مشتقی کنترل کننده، رفتار سیستم به رفتار سیستم خطی نزدیک تر می شود.

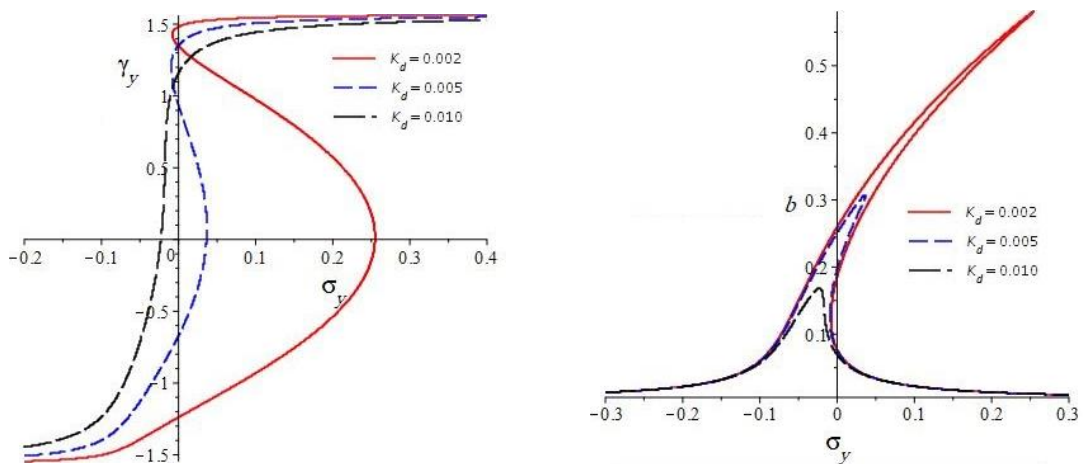
نتایج نشان می دهد که با افزایش ضریب مشتقی کنترل کننده، رفتار سیستم به رفتار سیستم خطی نزدیک تر می شود.



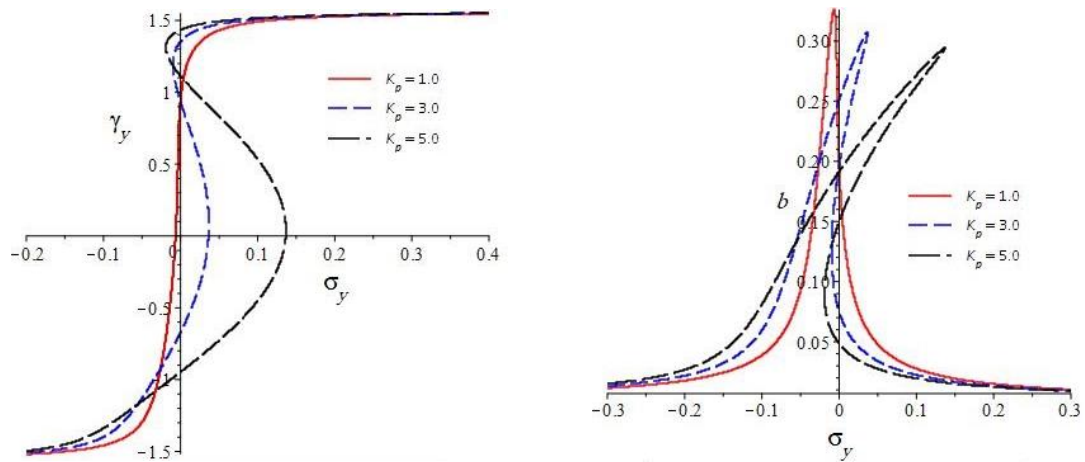
شکل ۵- تاثیر ضریب جابجایی کنترل کننده در دامنه و فاز نوسان‌های افقی



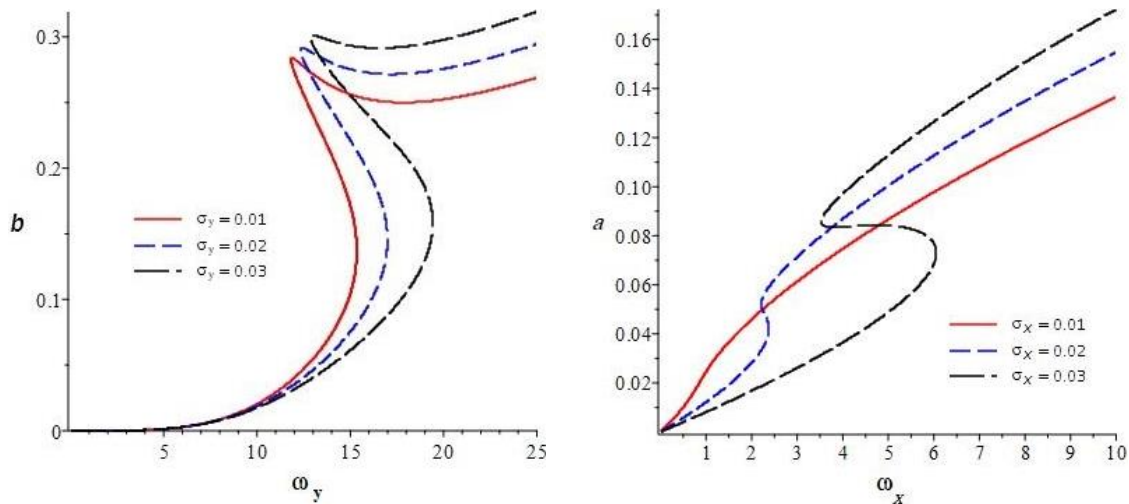
شکل ۶- دامنه و فاز نوسان‌های عمودی



شکل ۷- تاثیر ضریب سرعت کنترل کننده در دامنه و فاز نوسان‌های عمودی



شکل ۸- تاثیر ضریب جابجایی کنترل کننده در دامنه و فاز نوسان‌های عمودی



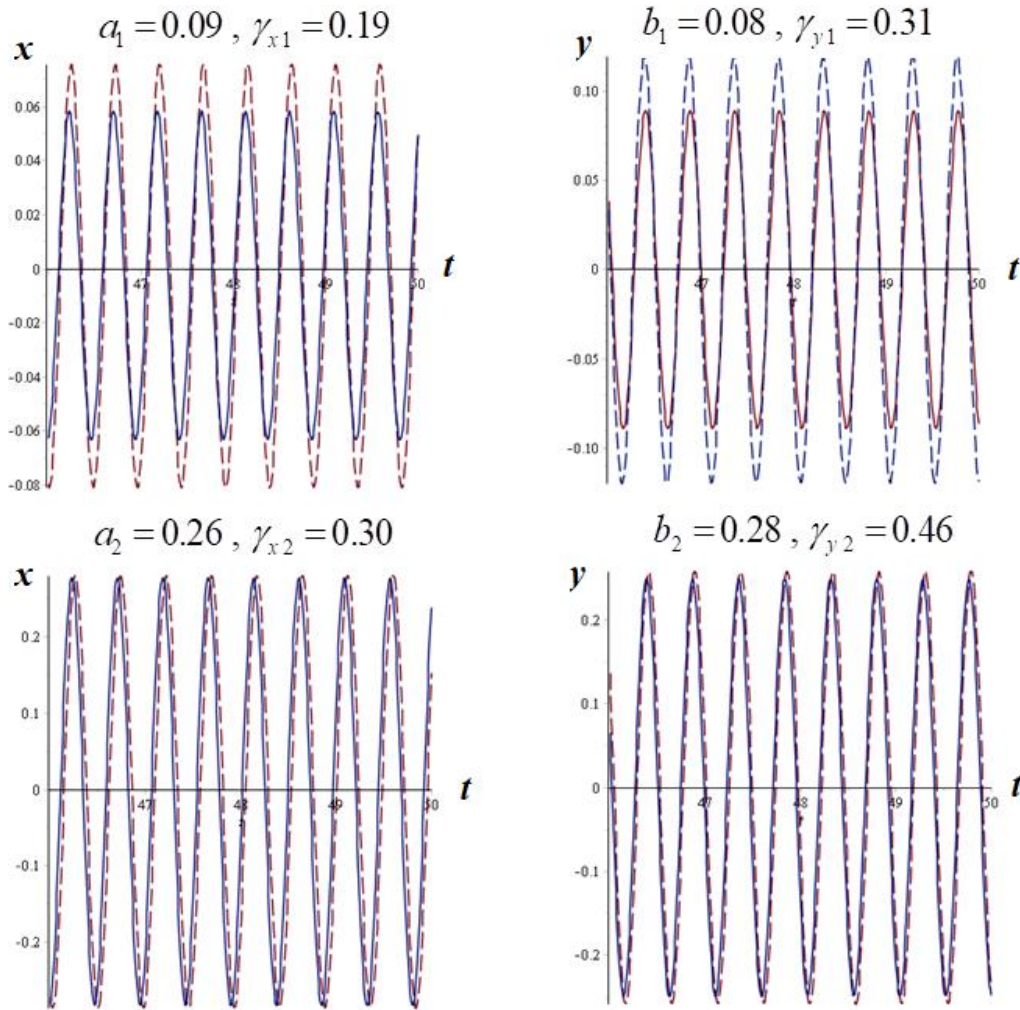
شکل ۹- تاثیر ضریب جابجایی کنترل کننده در دامنه و فاز نوسان‌های افقی

۴- جمع‌بندی

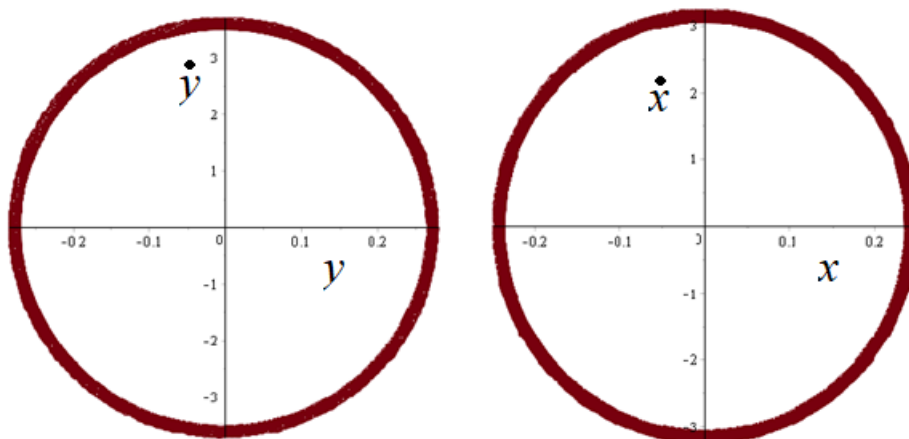
رفتار غیرخطی روتور جفکات با در نظر گرفتن اثر وزن روتور بررسی شده است. با فرض عوامل غیرخطی و تحریک ضعیف، از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات اغتشاشی استفاده شده است. نمودارهای دامنه و فاز، پاسخ-زمانی و همچنین نمودار فاز برای بررسی عملکرد کنترل کننده مورد استفاده قرار گرفته است. اثر پارامترهای کنترل کننده فیدبک حالت در رفتار غیرخطی روتور بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش ضریب جابجایی و کاهش ضریب سرعت کنترل کننده باعث افزایش رفتار غیرخطی روتور می‌شود.

حدی میل کرده است. با توجه به اینکه تحریک ضعیف است، نمودارهای فازی در دو راستای افقی و عمودی تقریباً مقادیر جابجایی و سرعت کمی را کسب کرده‌اند و نیروی تحریک نابالاسی و نیروی تحریک ناشی از ترم‌های غیرخطی، تقریباً سهمی یکسان در شکل فازی سیستم دارند.

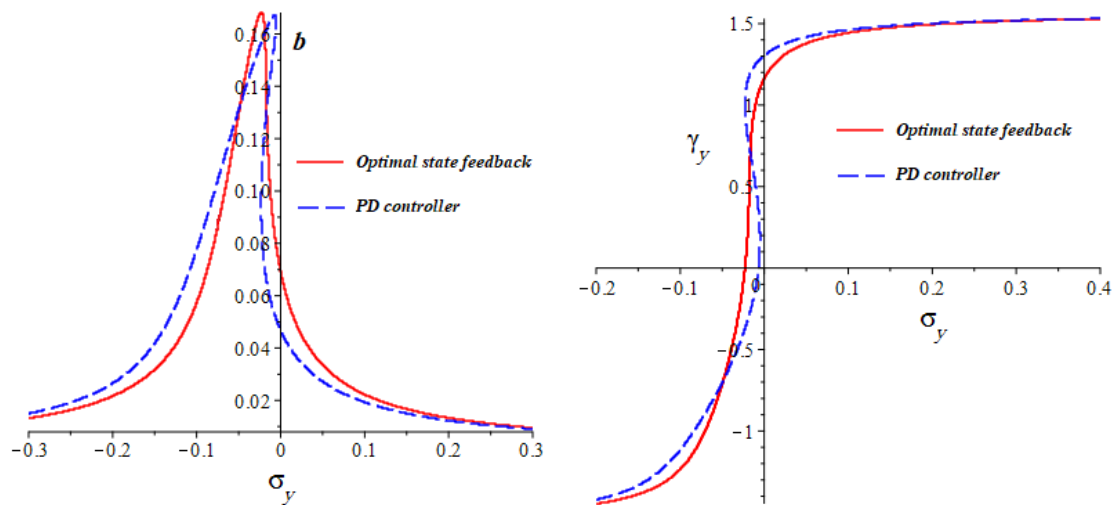
در شکل ۱۲، نتایج حاصل از روش کنترل فیدبک حالت بهینه با روش کنترل تناسبی- مشتقی مقایسه شده است. مقایسه نمودارهای دامنه و فاز نشان می‌دهد که با استفاده از روش فیدبک حالت، اثرات غیرخطی در دامنه و فاز کاهش یافته است و رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک تر شده است.



شکل ۱۰- پاسخ زمانی جابجایی افقی و عمودی به ازای مقادیر مختلف دامنه و فاز در دو حالت تحلیلی (خط صاف) و عددی (خط چین)



شکل ۱۱- دیاگرام فاز در راستای افقی و عمودی



شکل ۱۲- مقایسه روش کنترل فیدبک حالت بهینه و روش تناسبی - مشتقی

[3] Gohari M (2017) Integration intelligent estimators to disturbance observer to enhance robustness of active magnetic bearing controller. *Int J Control* 7(2): 25-31.

[4] Saeed NA, Kamel M (2016) Nonlinear PD-controller to suppress the nonlinear oscillations of horizontally supported Jeffcott-rotor system. *Int J Non Lin Mech* 87: 109-124.

[5] Saeed NA, Kamel M (2017) Active magnetic bearing-based tuned controller to suppress lateral vibrations of a nonlinear Jeffcott-rotor system. *Nonlinear Dynam.* 90 (1): 457-478.

[6] Saeed NA, El-Ganaini WA (2017b) Utilizing time-delays to quench the nonlinear vibrations of a two-degree-of-freedom system. *Meccanica* 52(11-12), 2969-2990.

[7] Yang D, Gao X, Cui E and Ma Z (2020) State-constraints adaptive backstepping control for active magnetic bearings with parameters nonstationarities and uncertainties. *IEEE T Ind Electron* 68(10): 9822-9831.

[8] Wang X, Zhang Y and Gao P (2020) Design and analysis of second-order sliding mode controller for active magnetic bearing. *Energies* 13(22): 5965.

[9] Yaseen HMS, Siffat SA, Ahmad I and Malik AS (2021) Nonlinear adaptive control of magnetic levitation system using terminal sliding mode and integral backstepping sliding mode controllers. *ISA T.*

[10] Molina LMC, Bonfitto A and Galluzzi R (2021) Offset-Free model predictive control for a cone-shaped active magnetic bearing system. *Mechatronics* 78: 102612.

[11] Morsi A, Abbas HS, Ahmed SM and Mohamed AM (2021) model predictive control based on

۵- علائم، نشانه‌ها و ارقام

جریان اولیه کنترل وزن روتور	i_0
جریان بایاس	I_0
زاویه بین جهت نیرو و مرکز سطح مقطع	α
جریان کنترلی فیدبک در راستای x, y	i_x, i_y
ضریب نفوذپذیری مغناطیسی	μ_0
سطح مقطع قطب‌های الکترومگنت	A
تعداد دور سیم‌پیچ	N
انحراف از وضعیت تعادل استاتیکی	x, y
فاصله هوایی بین روتور و استاتور	C_0

۶- مراجع

[۱] حیدری م، یوسفوند ح (۱۳۹۴) مدل سازی و کنترل یاتاقان مغناطیسی فعال به روش فیدبک حالت. همایش یافته‌های نوین در هوافضا و علوم وابسته.

[۲] دشتی رحمت آبادی ا، دوست‌حسینی ر، بنی سعید ن (۱۳۹۴) مدل‌سازی دینامیکی سیستم روتور یک یاتاقان مغناطیسی فعال، بررسی پارامترهای موثر بر عملکرد و طراحی سیستم کنترل آن. پایان نامه کارشناسی ارشد.

- [16] Halminen O, Kärkkäinen A, Sopenan J and Mikkola A (2015) Active magnetic bearing-supported rotor with misaligned cageless backup bearings: A dropdown event simulation model. *Mech Syst Signal PR* 50: 692-705.
- [17] Yu TJ, Zhou S, Yang XD and Zhang W (2018) Global dynamics of a flexible asymmetrical rotor. *Nonlinear Dynam* 91(2): 1041-1060.
- [18] Saeed NA, Eissa M and El-Ganini WA (2013) Nonlinear oscillations of rotor active magnetic bearings system. *Nonlinear Dynam* 74(1): 1-20.
- [19] Gao R, Luo G and Yan CX (2014) Dynamic modeling and analysis of active magnetic bearings. *Appl Mech Mater* 494: 685-688.
- [20] Nayfeh AH (2011) Introduction to perturbation techniques. John Wiley & Sons.
- linear parameter-varying models of active magnetic bearing systems. *IEEE Access* 9: 23633-23647.
- [12] Carmo Carvalho F, Fernandes de Oliveira MV, Lara-Molina FA, Cavalini Jr AA, Steffen JrV (2021) Fuzzy robust control applied to rotor supported by active magnetic bearing. *J Vib Control* 27(7-8): 912-923.
- [13] Couzon PY and Der Hagopian J (2007) Neuro-fuzzy active control of rotor suspended on active magnetic bearing. *J Vib Control* 13(4): 365-384.
- [14] Saeed NA, Awwad EM, El-Meligy MA and Nasr EA (2021) Sensitivity analysis and vibration control of asymmetric nonlinear rotating shaft system utilizing 4-pole AMBs as an actuator. *Eur J Mech A-Solid* 86: 104145.
- [15] Iwatsubo T, Tsujiuchi Y and Inoue T (1986) Vibration of asymmetric rotor supported by oil film bearings. *Ingenieur-Archiv* 56(1): 1-15.